Списание „Математика, компютърни науки и образование“ Том 7, кн. 2, 2024
Journal of Mathematics, Computer Science and Education Vol. 7, No. 2, 2024

DOI: 10.54664/ZGQQ3951

ПРИЛОЖЕНИЕ НА GEOGEBRA ПРИ ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОПИСАНО И ВПИСАНО КЪЛБО В МНОГОСТЕН И ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА

Жоржета Ангелова

APPLYING GEOGEBRA WHEN FINDING OUT THE CENTRE OF AN INSCRIBED AND DESCRIBED ORB IN A POLYHEDRON AND ROTATIONAL SPATIAL FIGURES

Zhorzheta Angelova

Abstract: In the paper some didactic ideas for consciously understanding groups of problems are discussed. The chosen problems are connected with finding out the center of an inscribed and described orb in a polyhedron and a rotational spatial figure. For each group of problems drawings of chosen spatial figures are presented. Using GeoGebra for illustrating the figure plays important role in explaining the possibility to inscribe or describe a given spatial figure. A sample solution of a concrete problem as a logical continuation of a theoretical exposition and its applying is given.
Keywords: GeoGebra, mathematical software, stereometry, spatial figures, mathematical problem

ВЪВЕДЕНИЕ

Подготовката за усвояване на стереометрични знания започва със запознаване с пространствени фигури. Поради необходимостта от осъзната пропедевтика се стига до идеята за разглеждане на общата стереометрия и конкретизирането ѝ при разглеждане на многостените като геометрични фигури, в които се използват теоретичните идеи на успоредност и перпендикулярност в пространството.

Общи цели на стереометрични знания са:

1. Развиване на пространствено въображение у учениците.
2. Запознаване на учениците с взаимните положения на две прави, на права и равнина и две равнини в пространството.
3. Прилагане на индивидуален подход чрез персонализация на обучението в решаване на стереометрични задачи – подбор на задачите, систематизиране според сложността и трудността на решението им и определяне на задачите-компоненти на дадена задача.

„Концепцията за персонализация в образованието е сложна и многостранна. Идеята за адаптиране на преподаването към обучаемия може да се припише на традицията на педагогиката, ориентирана към ученика“. [6]

За онагледяване на геометрични фигури и развиване на пространствено въображение е добре да се използват „системи за електронно обучение, които са мощно средство за подобряване и персонализиране на обучението“. [8] „Персонализирането ни пита как тези системи могат да бъдат модифицирани според нуждите на обучаемия. В същото време, като вземем предвид системните предизвикателства, породени от персонализацията, е ясно, че без цифрови технологии е малко вероятно да отговорим на нуждите на учащите“. [7]

Изложение

Трудностите при изучаване на стереометрични знания от учениците могат да се обобщят в следните аспекти:

1. Стереометрията е естествено продължение на планиметрията. Вниманието на учениците трябва да се насочи към свеждане на стереометричните задачи до познати задачи от равнинни фигури.
2. Отделянето на задачи-компоненти и писмено оформяне на решението на задача.
3. Построяването на геометрична фигура в равнината.
4. При решаване на задачи от вписани и описани тела най-често срещаните трудности за учениците са:

➢ определяне положението на центъра на вписаното в многостен кълбо;
➢ определяне положението на центъра на описаното кълбо около многостен;
➢ определяне положението на центъра на вписаното или описано кълбо в ротационни тела.

За преодоляване на някои от тези трудности е подходящо използването на образователния софтуер GeoGebra с цел онагледяване на геометричните обекти и фигури в триизмерното пространство. Предимство на софтуера е възможността за „изнасяне“ в 2D прозорец на равнинна геометрична фигура, съдържаща се в пространствена в етап от решението на задачата. При определяне положението на центъра на вписано или описано кълбо в ротационно тяло в GeoGebra чрез анимация може да се визуализира как „видовата отлика в определението задава начин за получаване елементите от обема на понятието. Такива са определенията на понятията окръжност, кръг и др.“[2]

„Традиционният системен училищен курс по геометрия, който се е създал под влиянието на „Елементи“ от Евклид, е претърпявал в процеса на развитие на училищното обучение значителни изменения както по отношение обема на изучавания материал, така и по отношение съдържанието на разглежданите в него отделни теми“.[5] С усвояване на повече планиметрични знания учениците развиват умения за решаване на задачи с по-висока степен на сложност на решението. Такива задачи намират място в темата „Елементи на стереометрията“ в учебното съдържание по математика за 10. клас.

В изучаването на стереометрични знания се отделят три вида задачи: *задачи за изчисление, задачи за доказване и задачи за построение*.

Чрез решаване на задачи за изчисление се осигурява системен преговор за учениците на някои метрични зависимости в равнинни фигури (най-често триъгълник, четириъгълник и окръжност).

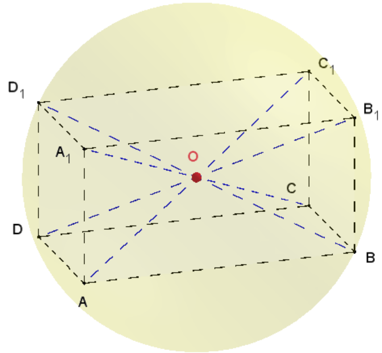
Задачите за построение в стереометрията се различават съществено от задачите за построение в планиметрията. Построението на обект се извършва в определена последователност на краен брой възможни построения. „Под задача за построение се разбира задача, в която се изисква по дадени геометрични обекти (точки, прави, равнини, отсечки, лъчи, многоъгълници и др.) да се построят други геометрични обекти, удовлетворяващи дадени условия за тях и такива относно дадените обекти“. [3]

Важно място в изучаване на стереометрични знания заемат задачите от вписани и описани тела. В зависимост от структурата им те могат да се отнесат към някоя от трите горепосочени задачи.

Съществен момент при изучаването на този вид задачи е да се обоснове пред учениците възможността да се впише или опише някакво тяло.

Например: *В кълбо да се впише правоъгълен паралелепипед*.

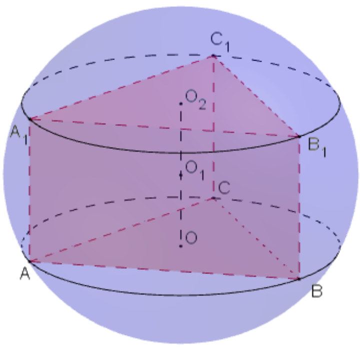
Тук е важно да се обърне внимание, че центърът на кълбото съвпада с пресечната точка на диагоналите на правоъгълния паралелепипед, защото той е точката равноотдалечена от върховете му. (фигура 1)



Фиг. 1. *Вписан правоъгълен паралелепипед* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *в кълбо с център* O

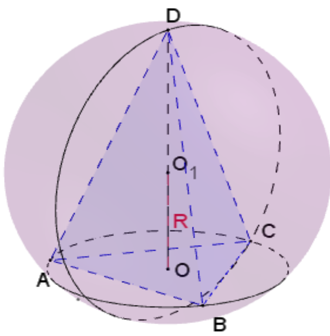
Подходящо е задачи от този вид да се изучават в последователност, в която трудностите се разграничават при решаването на задачи от даден тип и да се правят общи изводи за отделните групи задачи.

Първата група задачи се отнася към определяне положението на центъра на описаното кълбо. Чертежи на описано кълбо в GeoGebra са на фигура 1, фигура 2 и фигура 3.



Фиг. 2. *Описано кълбо с център* O_1 *около призма* $ABCA_1B_1C_1$

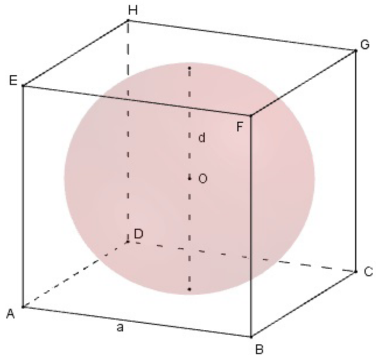
Фигура 2. изобразява права призма с долна и горна основа, около които могат да се опишат окръжности. В центъра на описаната около основата окръжност е издигнат перпендикуляр на, който лежи центъра на кълбото описано около призмата. Центърът на описаното около призмата кълбо е равноотдалечен от върховете ѝ и е средата на височината ѝ.



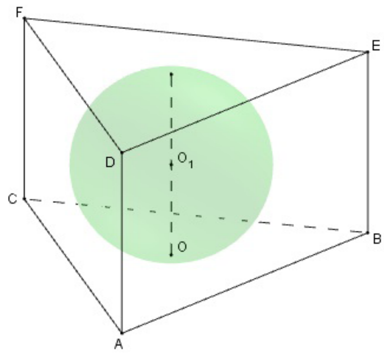
Фиг. 3. *Описано кълбо с център* O_1 *около пирамида* $ABCD$

За правилна пирамида с височина H и радиус r на описаната около основата окръжност съществуват такива зависимости между H и r, че центърът на описаното около пирамидата кълбо да лежи на основата на пирамидата, да е вътрешна точка за пирамидата или да е външна точка за пирамидата. Фигура 3. изобразява случай, при който центърът на описаното кълбо е вътрешна точка за пирамидата. Височината на пирамидата е с по-голяма дължина от радиуса на кълбото.

Втора група задачи се свежда до определяне положението на центъра на вписаното в многостен кълбо. Чертежите на фигура 4, фигура 5 онагледяват описаното в многостен кълбо.

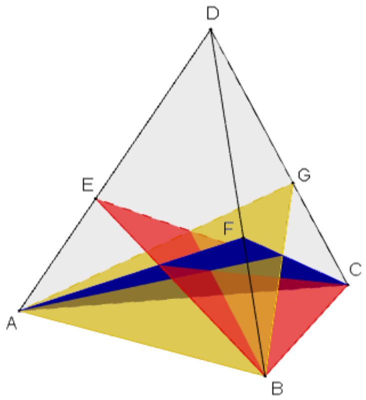


Фиг. 4. *Вписано кълбо с център O в призма $ABCDEFGH$*

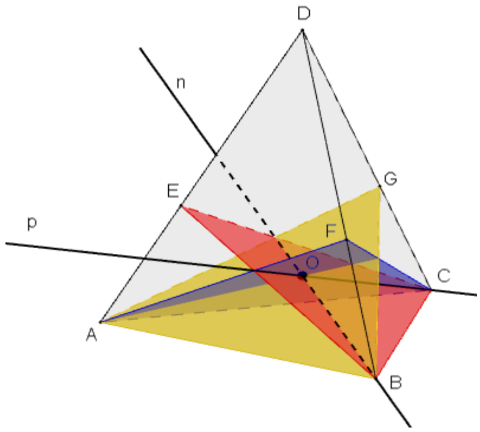


Фиг. 5. *Вписано кълбо с център O_1 в призма $ABCDEF$*

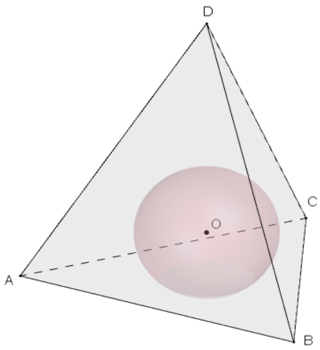
На фигура 6., 7., и 8. се проследява как три равнини в триъгълна пирамида разполовяват три от двустенните ъгли при основата на пирамидата. Тези три равнини се пресичат в една точка. Ъглополовящите равнини са представени с триъгълниците BEC, FAC и ABG. Пресечниците на равнините са правите n и p. Пресичат се в една точка – точката O. Точката O е център на вписано-то кълбо в пирамидата, тъй като се намира на равни разстояния от стените на двустенните ъгли и от всичките стени на пирамидата.



Фиг. 6. *Пирамида $ABCD$ и ъглополовящите равнини, представени с триъгълниците BEC, FAC и ABG*

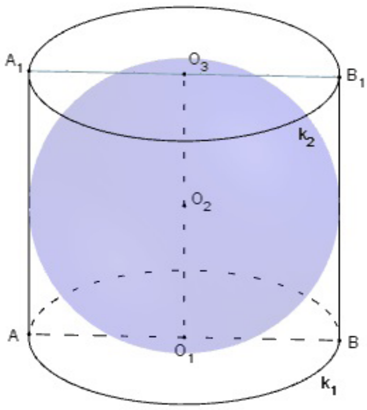


Фиг. 7. *Пирамида $ABCD$ и ъглополовящите равнини, представени с триъгълниците BEC, FAC и ABG, пресечниците на равнините – правите n и p с точка на пресичане – точката O.*

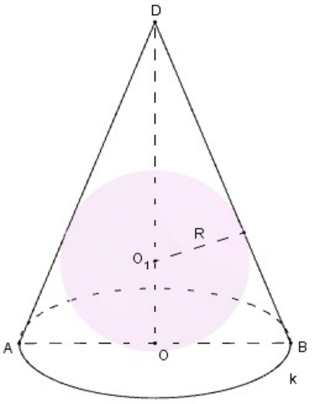


Фиг. 8. *Вписано кълбо с център O в пирамида $ABCD$*

Третата група задачи се свежда до определяне положението на центъра на вписаното кълбо във валчести тела.



Фиг. 9. *Вписано кълбо с център O_2 в прав кръгов цилиндър*



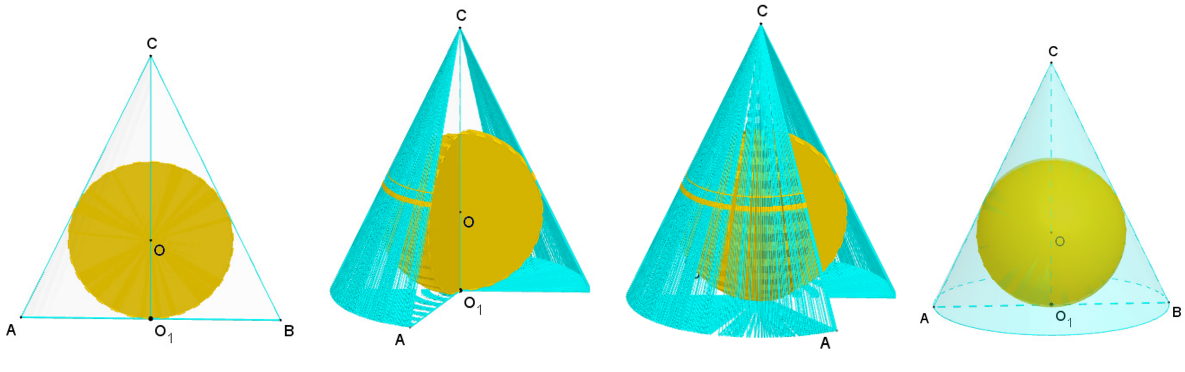
Фиг. 10. *Вписано кълбо с център O_1 в прав кръгов конус*

В третата група задачи е необходимо да се изследва и обоснове при какви условия е възможно да се впише кълбо във валчесто тяло.

Например: *Да се впише кълбо в прав кръгов конус*.

За персонализация на обучението в решаване на задача от този вид и важно всеки ученик да разбира понятието ротация като следната дефиниция „въртене на точка около права линия, наречена ос на въртенето, се нарича такова движение, при което точката описва окръжност в равнина, перпендикулярна към оста, центърът на която окръжност лежи върху оста." [1]

Центърът на кълбото съвпада с центъра на кръга, вписан в триъгълника, който е осното сечение на конуса. При завъртане на същия триъгълник около оста на конуса бедрата описват конична повърхнина. Основата на триъгълника описва основата на конуса, а вписаната окръжност образува околната повърхнина на вписаното кълбо. Чрез анимация в GeoGebra на фигура 11. се проследява процеса при, който видовата отлика в определението задава начин за получаване елементите от обема на понятието прав кръгов конус. Фигурата изобразява описване на прав кръгов конус около кълбо.



Фиг. 11. *Вписано кълбо в прав кръгов конус*

Преди да се премине към решаване на задачи от ротационни тела е методически целесъобразно да се разгледа в GeoGebra взаимното положение на елементите, от които се получава ротационното тяло. В 3D прозорец на софтуера се извършва на въртене от, което се заключва какво тяло се получава, ако разглежданата отсечка се завърти около права линия на ъгъл 360º. Организирането на подобни дейности в класна работа или самостоятелна работа помага за разбиране на стереометрични задачи от вписано кълбо във валчести тела.

При решаването на задачи от тази група е подходящо учениците да следват следната последователност:

– установяване каква фигура описва при въртенето си всеки връх;

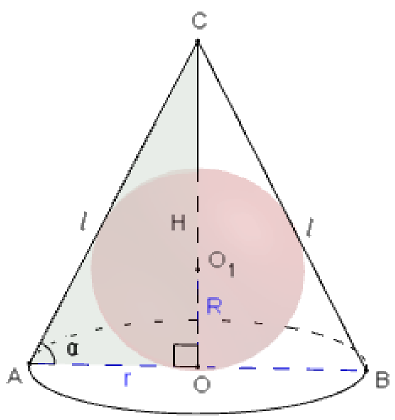
– описание на полученото тяло;
– достигане на изводи за формула за обем или повърхнина на полученото тяло;
– съставяне на необходимия брой уравнения за намиране на неизвестните в задачата;
– решаване на уравненията.

1. В прав кръгов конус е вписано кълбо, обемът на което е половината от обема на конуса. Да се намери тангенсът на ъгъла, заключен между образуващата и основата на конуса.
Необхои дидактически компоненти
Съкратен запис

Дадени елементи	Неизвестни елементи
прав кръгов конус	тангенсът на ъгъла, заключен между образуващата и основата на конуса
в конуса е вписано кълбо	
обемът на вписаното в конуса кълбо е половината от обема на конуса	

(1) Примерно решение

Въвеждаме означенията: O и r – съответно център и радиус на основата на конуса; C– връх на конуса; ΔABC – осно сечение на конуса; $OC = H$ – височина (ос) на конуса; O_1 и R – съответно център и радиус на вписаното в конуса кълбо; $\angle CAB = \alpha$ – ъгълът, заключен между образуващата и основата на конуса.



Фиг. 12. *Прав кръгов конус, вписано кълбо*

За обемите на конуса и вписаното кълбо знаем:

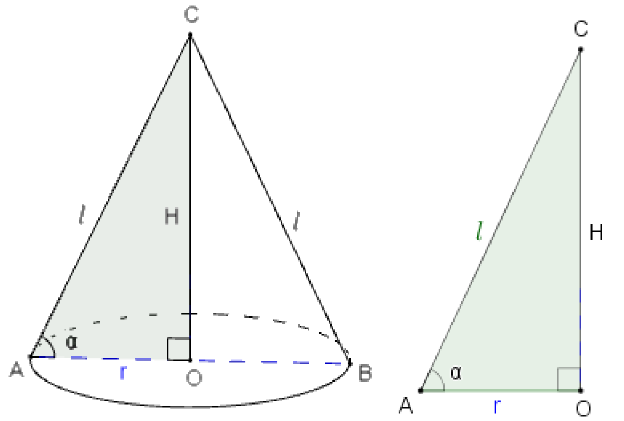
$$V_{\text{кълбото}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi r^2 H}{3}$$

По условие $\frac{V_{\text{кълбото}}}{V_{\text{конуса}}} = \frac{1}{2}$, откъдето получаваме:

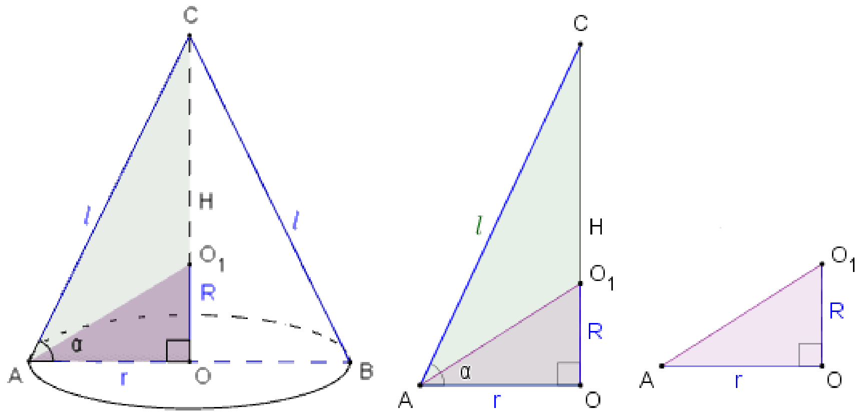
$\frac{4R^3}{3} = \frac{r^2 H}{6}$

$H = \frac{8R^3}{r^2}$.



Фиг. 13. *Прав кръгов конус и чертеж на* ΔAOC

От правоъгълния ΔAOC намираме $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{r}$ и след заместване получаваме $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8R^3}{r^3}$.



Фиг. 14. *Прав кръгов конус планиметричен чертеж на* ΔAOC *и* ΔAOO_1

От правоъгълния ΔAOO_1 получаваме $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}$.

$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 8\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$$

$$4\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

Тогава $\mathrm{tg}\alpha = 8\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$ и след преобразуване получаваме:

Полагаме $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = u$ и получаваме квадратното уравнение $4u^2 - 4u + 1 = 0$ с корени $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$

Следователно $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

Изводи

Поради абстрактния характер на посочените групи задачи е добре изучаването им да започне със сравнително леки упражнения като намиране на ортогоналната проекция на дадена точка, построяване на пресечницата на две равнини и др. Така се формира съзнателно разбиране за пространствените построения и по естествен начин се преминава към решаване на задачи за построяване на сечения. Сложността при тези задачи следва от многообразието в задаването на равнина при сечение на многостен с равнина. Тук методически обосновано е да се разгледа пред учениците сечението като получен многоъгълник, страните, на който са части от пресечниците на равнината на сечението със стените на тялото. „Да решим задача за построение означава да намерим подходящата последователност от изброените операции, чието прилагане води до построяване на посочената в задачата фигура“. [4]

При решаването на задачи от вписани и описани тела е важно да се провери възможността да се впишат или опишат други тела в/около това, което е дадено в задачата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И БЪДЕЩА РАБОТА

В задачите от посочените групи е важно да се развие умение от учениците за определяне на коя група задачи е представител дадената и аналогия с начини на решение с други познати задачи от същата група. Също и трансформиране на избрана задача в друга със същите или променени числови данни и илюстриране на центровете на вписано и описано кълбо за други пространствени фигури. При решаването на стереометрични задачи учениците трябва да се убедят от категоричната необходимост на чертежа като основен дидактичен материал в решението или като цел на решението.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Ляпин С. Е., Гатева С. А., Квасникова З. Я., Крельщтейн Б. И. (1960).** Методика на обучението по математика. Част II. Държавно издателство „Народна просвета“. Lyapkin S. E., Gateva S. A., Kvasnikova Z. Ya., Krelushtein B. I. (1960). Metodika na obuchenieto po matematika. Chast II. Durzhavno izdatelstvo “Narodna prosveta”.

[2] **Минчева, И. (2023).** Методика на обучението по математика в началното училище. изд. АСТАРТА, Пловдив. Mincheva, I. 2023. Metodika na obuchenieto po matematika v nachalnoto uchiliscte. izd. ASTARTA, Plovdiv.

[3] **Минчева И. (2023).** Училищен курс по математика. изд. АСТАРТА, Пловдив. Mincheva, I. 2023. Uchilischten kurs po matematika Минчева, izd. ASTARTA, Plovdiv.

[4] **Минчева, И. (2010).** Ръководство за решаване на задачи по училищен курс по геометрия. изд. АСТАРТА, Пловдив. Mincheva, I. 2010. Rukovodstvo za reshavane na zadachi po uchilishten kurs po geometriya. izd. ASTARTA, Plovdiv.

[5] **Петканчин Б. Л. (1980).** Методика на преподаването по математика в средното училище. Държавно издателство „Народна просвета“. Petkanchin B. L. 1980. Metodika na prepodavaneto po matematika v srednoto uchilishte. Durzhavno izdatelstvo „Narodna prosveta“.

[6] **Antonio Bartolomé, Linda Castañeda, Jordi Adell (2018).** Personalisation in educational technology: the absence of underlying pedagogies. International Journal of Educational Technology in Higher Education.

[7] **Hannah Green,** Keri Facer and Tim Rudd, Patrick Dillon, Peter Humphreys . Personalisation and Digital Technologies. NESTA Futurelab.

[8] **Кондратенко А. Б., Кондратенко Б. А. (2013). Т**ехнология обучения в виртуальной образовательной среде персонализации обучения. Открытое образование.

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА

Гл. ас. д-р Жоржета Йорданова Ангелова,
Факултет „Математика и информатика“, Катедра „Алгебра и геометрия“,
Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“,
e-mail: zh.angelova@ts.uni-vt.bg

ABOUT THE AUTHOR
Assoc. Prof. Zhorzheta Angelova, PhD, Faculty of Mathematics
and Informatics, Department of Algebra and Geometry,
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo,
Bulgaria, e-mail: zh.angelova@ts.uni-vt.bg