

НАЧАЛНА УЧИЛИЩНА ПЕДАГОГИКА

PRIMARY SCHOOL PEDAGOGY

НЯКОИ ИДЕИ ЗА ИЗПОЛЗВАНЕ НА GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА
ПОНЯТИЕТО „ПИРАМИДА“ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Жоржета Йорданова Ангелова
ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

SOME IDEAS ON USING GEOGEBRA AIMING AT LEARNING THE CONCEPT
OF PYRAMID IN MATHEMATICS TEACHING

Zhorzheta Jordanova Angelova
St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo

Abstract: The paper discusses the stages of the process of introduction, understanding and assimilating new concepts. The ideas are based on some concrete cases of pyramid as well as on solving a chosen problem from the school course of geometry. All the figures in the paper are constructed by the mathematical software GeoGebra. As a result the constructions are precise and illustrative aiming at understanding the concept, its elements and relations. The paper studies learning the concept of pyramid throughout the primary and secondary teaching period by systemizing the component concepts and their assimilation in school course of mathematics.

Key words: mathematical concept, geometric figure, pyramid, geometry, GeoGebra, problem solving.

ВЪВЕДЕНИЕ

За формиране на съзнателна представа за стереометрична фигура е необходимо учениците да имат систематизирани знания от планиметрията, както и някои теоретични стереометрични знания. „Геометричният материал е един от основните компоненти на учебното съдържание по математика и затова и обучението по геометрия е част от обучението по математика в началните класове“ (Минчева 2010а: 301). Много често за диагностика на усвояването на математически знания се използва решаване на стереометрични задачи и то предимно на задачи от пирамида (Буюклиева, Минчева, Накова 2017: 27), (Буюклиева, Минчева, Накова 2016: 39, 40), (Минчева 2010б: 204, 210, 212, 217).

В начален етап на обучение на пропедевтично ниво учениците се запознават с някои основни геометрични понятия (точка, права, отсечка, ъгъл и др.) и някои видове равнинни фигури (триъгълник, четириъгълник, правоъгълник, квадрат). В този период се развиват умения за откриване, описване или определяне, както и за класификация на геометрични знания и понятия според основните им

елементи. По-късно тези знания се разширяват, като се въвеждат още геометрични понятия, техните елементи и свойства. Въвеждането на стереометрични знания е естествено продължение на изучаване на вече познати понятия от планиметрията.

В статията основно място заема описанието на начините за използване на математическия софтуер GeoGebra за разбиране и усвояване на стереометрични знания.

„GeoGebra е лесно достъпен математически софтуер, който може бързо и лесно да се изтегли и инсталира. След като стартира, се отварят два прозореца: алгебричен прозорец и чертожно поле. В алгебричния прозорец се изобразяват координатите на точки, прави, отсечки, многоъгълници и на всички обекти, които сме построили с помощта на менюто с инструменти. В чертожната повърхност се изобразяват геометричните фигури, които сме построили. Има възможност от менюто над чертожната повърхност да показваме или скриваме осите, да избираме цветове за обектите, да показваме или скриваме имена и стойностите на обектите на чертежа. Това ни помага да подготвим чертожното поле в най-удобния вид за работа върху него.“ (Mincheva, Angelova 2017: 32, 33)

„Чрез GeoGebra се оцветява фигурата и отделните ѝ елементи, а използването на анимация онагледява основните елементи на фигурата – основи, основни ръбове, околни стени, околни ръбове, височина и др. Така се достига до по-достъпно представяне, по-ясно изложение и разбиране на стереометричните знания, както и за по-бързо и лесно откриване на решението на стереометрични задачи.“ (Минчева, Ангелова 2018: 29)

Методическите бележки относно въвеждане на нови геометрични понятия са съобразени с особеностите при разширяване на математическите знания във всяка година на обучение.

МЕТОДОЛОГИЯ

Ще разгледаме някои методически идеи за изучаване на правилна пирамида в обучението по математика. Въвеждането на това понятие обикновено е чрез откриване на правилни пирамиди в реална житейска практика, например в исторически обекти и сгради, в обекти от заобикалящия учениците свят и др.

В статията за всички чертежи и методически бележки са използвани три прозореца на GeoGebra: алгебричен прозорец, чертожна повърхност и 3D прозорец.

„Понятията тяло, повърхнина и лице на повърхнина са основни понятия в стереометрията. Трудно е да се дадат точни определения за тях. Може да се каже, че телата са по-често срещаните неравнинни фигури в стереометрията. Затова съдържанието им се пояснява с модели и примери“ (Станилов, Лангов, Кучинов, Николов 1987: 17). Необходимостта от изучаване на стереометрия възниква в резултат от практическата дейност на човека, която се състои в опериране и сравняване на различни предмети и операции с тях.

В 6. клас за първи път се въвеждат понятията „пирамида“ и „правилна пирамида“, както и формулите за намиране на лице на повърхнина и обем на правилна пирамида. Някои от формулите се дават без доказателство, а други се обосновават частично или верността им се проверява чрез експериментална дейност.

В този етап пирамидата се определя като тяло, на което едната стена е многоъгълник, а останалите му стени са триъгълници с общ връх. Правилната пирамида се определя като пирамида с основа правилен многоъгълник и с равни околни ръбове.

Пирамида и правилна пирамида се изучават по-късно – в 10. и в 12. клас, където се дават точни определения за всяко от тях.

Определение 1. Многостен, на който една от стените е многоъгълник, а останалите му стени са многоъгълници с общ връх и основи – страните на многоъгълника, се нарича пирамида. (Паскалев, Паскалева 2004: 42).

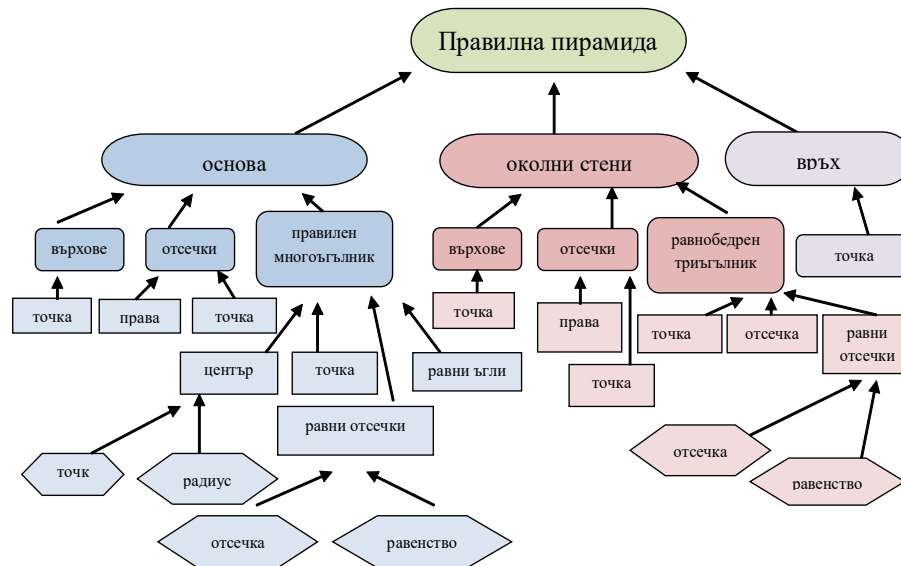
Определение 2.1. Пирамида с основа правилен многоъгълник и околни стени – равнобедрени триъгълници, се нарича правилна пирамида. (Паскалев, Паскалева 2004: 43).

Определение 2.2. Пирамида, на която основата ѝ е правилен многоъгълник и центърът на основата ѝ е ортогонална проекция на върха на пирамидата, се нарича правилна.

В училищния курс по математика се изучават следните свойства на правилната пирамида:

- Всичките ѝ околни ръбове са равни и определят с равнината на основата равни ъгли.
- Всички околни стени са еднакви равнобедрени триъгълници.

- Апотемите (височините на околните стени, които минават през върха на пирамидата) са равни.
 - Околните стени образуват равни двустенни ъгли с равнината на основата.
 - Всеки две съседни околни стени образуват равни двустенни ъгли (Рангелова 2006: 76).
- Определението на понятието „правилна пирамида“ дава възможност за систематизиране на понятията компоненти, включени в съдържанието на основното понятие. (фиг. 1.).



Фигура 1. Система на понятията – компоненти на понятието правилна пирамида

Схемата на фигура 1. показва основните връзки между елементите и понятията компоненти на правилна пирамида, някои от които се въвеждат и изучават още в начален етап на обучение. В този етап математическите знания се формират въз основа на житейския опит на учениците, чрез опериране с конкретни елементи от познати предмети. Обобщенията се правят след установяване на общите свойства на елементите, наблюдавани в опит (Колягин, Луканкин, Мокрушин, Оганесян, Пиручин, Саннинский 1980: 10).

Ще проследим изучаването на понятията компоненти на понятието „правилна пирамида“ в обучението по математика.

„За усвояването на математически понятия са особено важни дейностите, свързани с дефиниране на понятията чрез други понятия, систематизиране на понятията според свойствата в съдържанието на основните понятие, изказване на сждения и умозаклучения чрез дадено понятие и свойствата му, решаване на задачи с дадено понятие и др. В основата на тези дейности е разбирането на понятието“ (Минчева 2010а: 9).

Съществуват следните начини за въвеждане на понятия в училищния курс по математика:

Чрез посочване на някои елементи от обема на понятието и съобщаване на термина му (остенсивен).

Посочват се елементи от обема на понятието, съобщава се терминът му и се дава определение.

Чрез система от аксиоми (така обикновено се въвеждат първичните понятия).

Дава се направо определението на понятието (Минчева 2010а: 35).

В нагледния курс по геометрия (1.–6. клас) се използват първите два начина.

„Понятията точка и права са първични в геометрията и за тях не се дават определения. Те се въвеждат косвено чрез система от аксиоми“ (Минчева, И. 2010: 303).

„Понятието отсечка се въвежда в първи клас нагледно чрез модели на отсечка. Уменията за чертане на отсечка се изграждат поэтапно, като се решава последователност от задачи“ (Минчева 2010а: 304). „Измерването на отсечка е свързано с приложение на знанията за мерни единици за дължина и с умението да се сравняват отсечки“ (Минчева 2010а: 305).

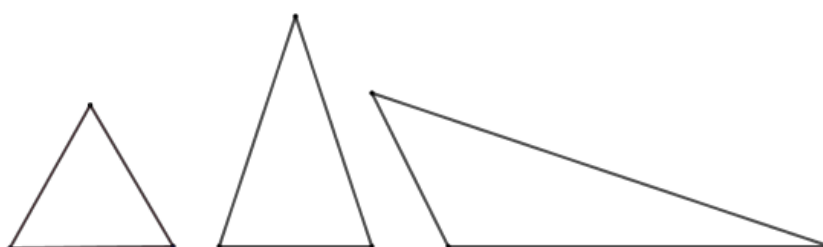
„Понятието триъгълник се въвежда естествено чрез наблюдение на различни триъгълници и откриване на общите им съществени свойства и основни елементи – страни, ъгли, върхове“ (Минчева

2010a: 307). „Понятието четириъгълник се въвежда, като се използва връзката между съдържанието на понятието и термина му (четири ъгъла – четириъгълник)” (Минчева 2010a: 309).

Така децата развиват умения да разпознават и сравняват различни геометрични фигури, да откриват техните основни елементи свойства и да решават задачи, в които да използват дадено понятие или система понятия.

„Знанията за триъгълник се разширяват след разглеждане на класификацията на триъгълниците според страните и според ъглите“ (Минчева 2010a: 308), а знанията за четириъгълник – чрез изучаване на някои видове четириъгълници като квадрат и правоъгълник.

В нагледния курс по геометрия чрез измерване дължините на страните на триъгълник децата определят вида на триъгълника според страните – равностранен, равнобедрен и разностранен. Удачно е учителят да използва GeoGebra, тъй като с чертеж на триъгълник в динамичния софтуер може да се направи демонстрация на всяка фигура (всеки вид триъгълник), което привлича вниманието на учениците. Например на готов чертеж могат да се показват и скриват стойностите на дължините на отсечките, могат да се променят дължините, с което се променя и видът на триъгълника. Може да се избират различни цветове за отсечките, които интуитивно да създават връзки между елементите (фиг. 2.).



Фигура 2. Видове триъгълници според дължините на страните

В трети клас се въвеждат нови геометрични понятия „лъч“, „ъгъл“, „прав ъгъл“, „остър ъгъл“ и „тъп ъгъл“ и така става достъпно и въвеждането на видовете триъгълници според ъглите.

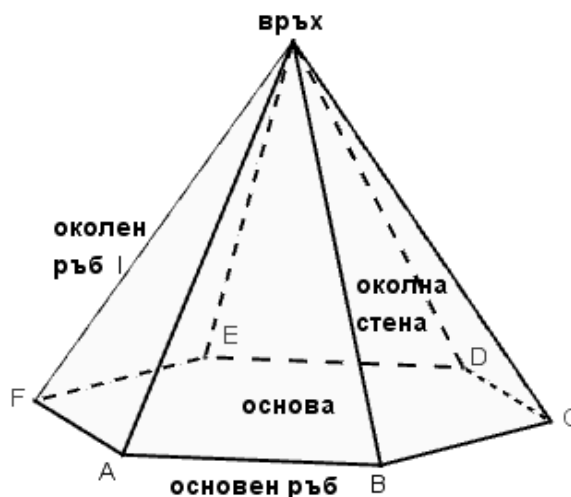
На този етап новите понятия все още не се дефинират логически. Критерий за усвояването им е правилното употребяване на съответните термини от учениците (Колягин, Луканкин, Мокрушин, Оганесян, Пиручин, Саннинский 1980: 10).

В четвърти клас се разширяват се знанията за ъгъл. Развиват се умения за измерване на ъгъл с транспортир и чертане на ъгъл по дадена градусна мярка.

Изучаването на правоъгълен паралелепипед в пети клас е свързано с дефиниране на понятието и с даване на основните му елементи – върхове, основни ръбове, околни ръбове, основи, околни стени. Така тези знания са основа за изучаване на други стереометрични фигури в шести клас. Тогава учениците срещат нови геометрични форми в равнината и в пространството – окръжност, кръг и многоъгълник, призма, пирамида, цилиндър, конус и кълбо.

С усвоените геометрични знания в етапа на нагледната геометрия е достъпно въвеждането и на понятието „правилна пирамида“ – определение, основни елементи и свойства. Така се достига поетапно и до разбиране на понятието чрез разбиране свойствата на основните му елементи – основа (правилен многоъгълник, най-често равностранен триъгълник или квадрат), връх (точка), околни стени (равнобедрени триъгълници). След това се развиват и уменията за чертане на правилна пирамида. За разбиране на понятието „правилна пирамида“ и за съзнателното правилно чертане е много полезно използването на GeoGebra. Динамичността на софтуера дава възможности за онагледяване на всички етапи на чертането, както и на всеки основен елемент на пирамидата.

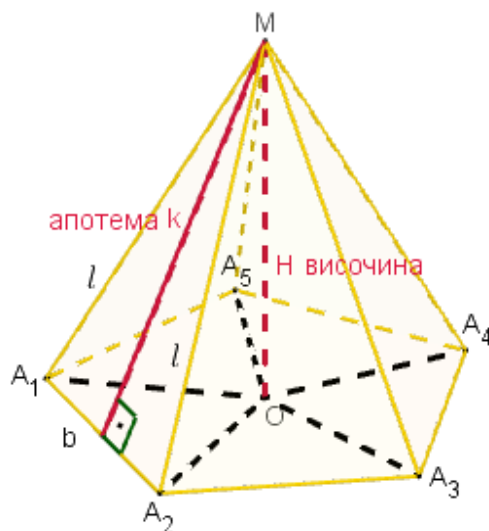
За въвеждането, разбирането и усвояването на понятията „пирамида“ и „правилна пирамида“ е подходящо използването GeoGebra. В прозорец с 3D изглед учениците ще видят пирамидата в пространството от всички възможни перспективи. В този прозорец могат да се и задават различни стойности на вече построените фигури и след това те да се променят, както и да се избира един цвят за цялата фигура или различни цветове за отделните ѝ елементи (фиг. 3.).



Фигура 3. Основни елементи на правилна пирамида

На чертежа на фигура 3. ясно се виждат всички основни елементи на пирамидата. Чрез завъртане на пирамидата или оцветяване на избрани нейни елементи се достига до разбиране на фигурата и до развиване на пространствено мислене.

На чертежа на фигура 4. са дадени още някои елементи на правилна пирамида, като височина, апотема, център на основата. Чрез GeoGebra тези елементи са много лесно видими и се онагледява връзката им с останалите елементи на пирамидата.

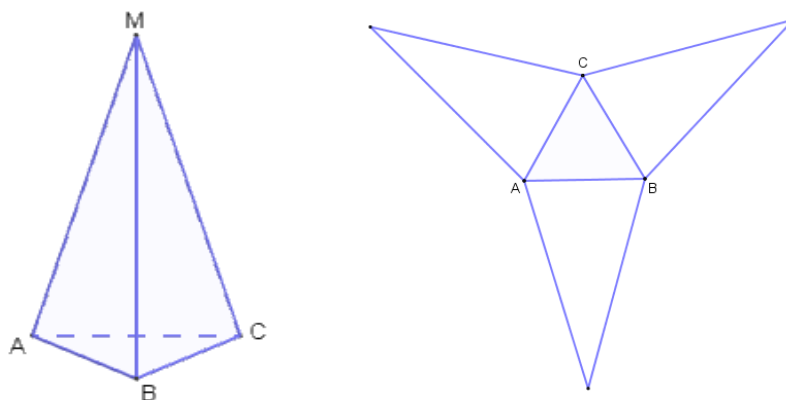


Фигура 4. Елементи на правилна пирамида

Преди да се въведе понятието „височина“ в пети клас, учениците се запознават в отделна методическа единица с перпендикулярни прави. Затвърдяват се уменията за измерване на ъгъл с транспортир и след построяване на перпендикулярни прави се вижда, че през дадена точка може да се начертае само една права, перпендикулярна на дадена права, и че перпендикулярните прави сключват ъгъл 90° . Така естествено следва въвеждането на понятието „височина в триъгълник“. Тук се въвежда и формулата за намиране лице на триъгълник чрез страна на триъгълника и височината към нея.

Изучаването на елементите на пирамидата е ключов момент за правилното определяне на това, което е дадено в задачата, за това, което трябва да се намери, за избора на подходяща формула и правилното ѝ прилагане. Затова е необходимо учениците да формират ясна и пълна представа за стереометричната фигура. Подходящо е още при представянето ѝ да се покаже развивка на пирамида (фиг. 5.).

Развивката на триъгълната пирамида от фигура 5 е направена в GeoGebra. Може да се наблюдава в два прозореца – чертожна повърхност и 3D прозорец. В чертожната повърхност се вижда цялата развивка, а в 3D прозореца е възможна анимация, в която се наблюдава как околните стени се отдалечават постепенно от първоначално общия си връх. Използването на анимации в математическия софтуер за запознаване с геометрични фигури и техните елементи или за показване на очевидни истини освен разбиране на фигурата създава и приятни емоции у учениците. Онагледяването в GeoGebra за разширяване или въвеждане на нови знания е част от обогатяването на наблюдателния опит на учениците.



Фигура 5. Развивка на правилна триъгълна пирамида

Заедно с елементите на дадена фигура и връзката между тях в обучението по математика се разглеждат и задачи, чрез които се осъществяват пропедевтика и системно изучаване на геометрични понятия, включително и на понятията „пирамида“ и „правилна пирамида“. Най-често срещаните задачи са изчислителни и са свързани с намиране на елементи на пирамидата, намиране на лице на елемент на пирамидата, както и за намиране лице на повърхнина и обем на пирамида.

При изучаване на планиметрични знания формирането на понятия често се основава на чертеж, който отразява адекватно това понятие (Колягин, Луканкин, Мокрушин, Оганесян, Пиручин, Саннинский 1980: 183). Чертежът е ключов компонент при решаване на геометрични задачи и особено важен при решаване на стереометрични задачи. Той е цел и средство при решаване на всяка стереометрична задача и може да се построи точно чрез GeoGebra. Така, от една страна, се онагледяват фигурата и нейните елементи – дадени и неизвестни – и от друга – се съдейства за по-бързо откриване на зависимостите между данните в задачата и до нейното по-бързо и по-лесно решаване.

За да илюстрираме идеите, изложени по-горе, ще разгледаме задача от правилна пирамида и ще предложим методически бележки за решаването ѝ, както и чертежи в GeoGebra на дадената фигура и нейни елементи.

Задача. *Правилна осмоъгълна пирамида има лице на повърхнина $91,2 \text{ cm}^2$ и основен ръб 2 cm . Дължината на основния ръб е равна на $\frac{5}{6}$ от дължината на апотемата на основата на пирамидата. Намерете лицето на основата и дължината на апотемата на пирамидата.*

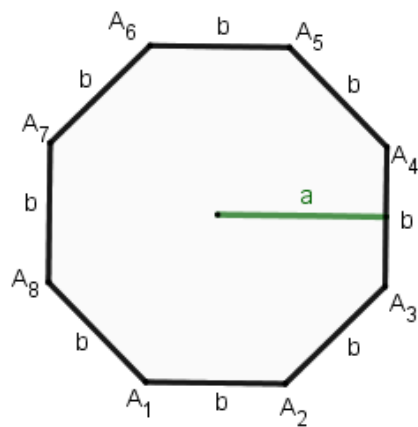
Съкратен запис на задачата:

Дадено	Да се намери
$n = 8$	$B = ?$
$S_1 = 91,2 \text{ cm}^2$	$k = ?$
$b = 2 \text{ cm}$	
$b = \frac{5}{6}a$	

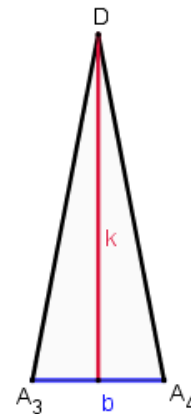
Необходимите знания и понятията компоненти могат да се систематизират, както следва (Таблица 1.).

Таблица 1. Необходими знания и понятия компоненти за решаване на задачата

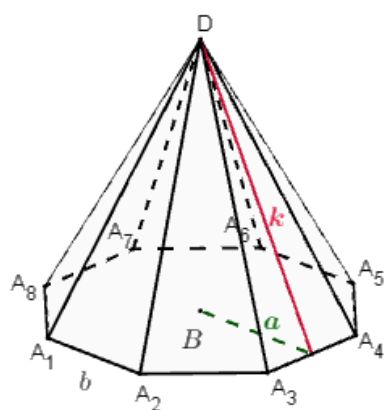
Знания и понятия от планиметрията	Знания и понятия от стереометрията
1. Правилен осмоъгълник а) определение б) основни елементи – страни, апотема в) чертеж на правилен осмоъгълник и елементите му (фигура 6а.) в) формула за лице на правилен осмоъгълник	1. Правилна осмоъгълна пирамида а) определение б) основни елементи – основа, основни ръбове, околни стени, околни ръбове, връх, апотема в) чертеж на правилна осмоъгълна пирамида и елементите ? (фигура 7а.)
2. Равнобедрен триъгълник а) определение б) основни елементи – основа, височина към основата (апотема на пирамидата) (фигура 6б.) в) формула за лице на триъгълник	2. Лице на околна и лице на пълна повърхнина на правилна пирамида (фигура 7б.) 3. Формули за лице на околна и лице на пълна повърхнина на правилна пирамида



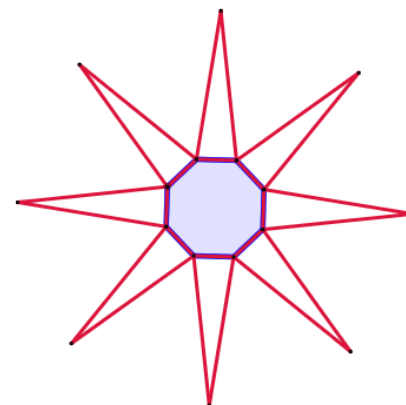
Фигура 6а. *Правилен осмоъгълник*



Фигура 6б. *Равнобедрен триъгълник*



Фигура 7а. *Правилна осмоъгълна пирамида*



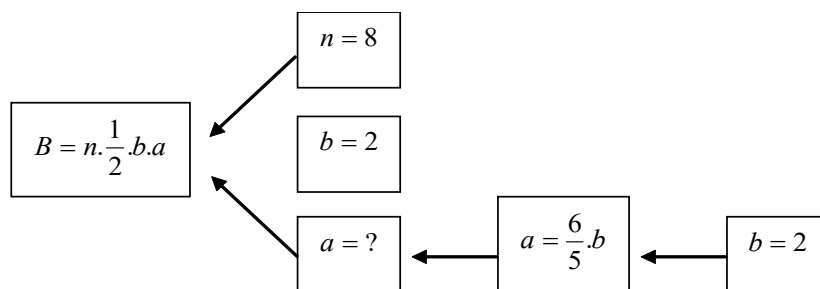
Фигура 7б. *Развивка на правилна осмоъгълна пирамида*

Решаването на задачата преминава през два етапа:

1. Намиране лицето на основата на пирамидата (планиметрична задача компонента).
2. Намиране дължината на апотемата на пирамидата (стереометрична задача компонента).

Първи етап

Разсъжденията за намиране лицето на основата на пирамидата се извършват по схемата:

**План на решение:**

1. Намиране на апотемата на основата a .
2. Намиране на лицето на основата B .

Решение:

$$b = \frac{5}{6} \cdot a$$

$$a = \frac{6}{5} \cdot b$$

$$a = \frac{6}{5} \cdot 2$$

$$a = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

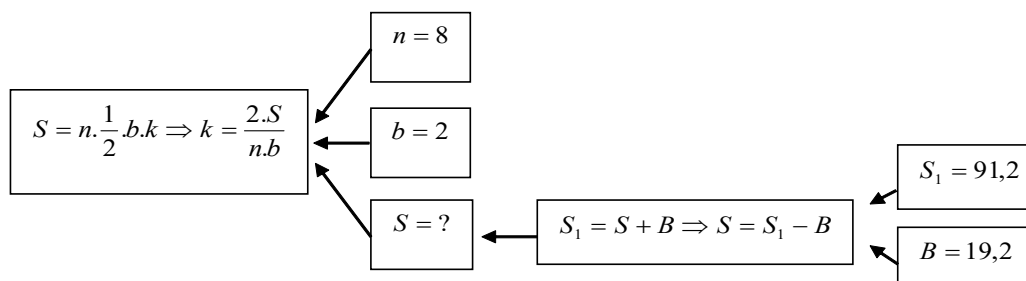
$$B = n \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot a$$

$$B = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{12}{5}$$

$$B = \frac{96}{5} = 19,2 \text{ cm}^2$$

Втори етап

За намиране дължината на апотемата на пирамидата разсъжденията са по схемата:

**План на решение:**

1. Намиране лицето на околната повърхнина S .
2. Намиране на апотемата на дадената пирамида k .

Решение:

$$S_1 = S + B$$

$$S = S_1 - B$$

$$S = 91,2 - 19,2$$

$$S = 72 \text{ cm}^2$$

$$S = n \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot k$$

$$k = \frac{2 \cdot S}{n \cdot b}$$

$$k = \frac{2 \cdot 72}{8 \cdot 2}$$

$$k = 9 \text{ cm}$$

За да се разбере решението на задачата, е добре ясно да се откроява последователността на етапите на решението и връзката между тях.

От решението на задачата се вижда, че при изучаването на стереометрия и при решаване на стереометрични задачи се налага използване на различни дефиниции и твърдения от планиметрията, необходими за усвояването на едни или други стереометрични понятия, както и за решаване на дадена стереометрична задача. Така решаването на много стереометрични задачи се свежда до решаването на някои задачи от планиметрията (Колягин, Луканкин, Мокрушин, Оганесян, Пиручин, Саннинский 1980: 183). Затова е необходимо учениците да усвоят и затвърдят знанията си в тази област. Това много бързо и лесно се постига с прилагане на GeoGebra, тъй като освен подробен, ясен и точен чертеж на пространствената фигура, могат да се построят всички нейни линейни и равнинни елементи или елементи, които са необходими за решаване на задачата.

РЕЗУЛТАТИ

Направеното теоретично изследване показва, че използването на математическия софтуер GeoGebra води до усъвършенстване на обучението по математика в следните аспекти:

- Подпомага разбирането и усвояването на математически и в частност – на геометрични знания.
- Играе съществена роля при развитие на пространственото мислене на учениците.
- Насочва съзнателно към откриване на решението на стереометрични задачи.

ДИСКУСИЯ

Образователните софтуери все по-често намират приложение в учебната среда. Могат да се разгледат много педагогически аспекти за необходимостта от интегриране на съвременни образователни технологии в образователния процес. GeoGebra не е единствен софтуер, който е приложим в обучението по математика, но е особено полезен в обучението по геометрия. Предимствата на обучението по стереометрия чрез използване на GeoGebra пред стандартното такова са очевидни и се оценяват от всички, които изучават и/или преподават геометрия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разбирането на математическо понятие е необходимо за ефективното обучение по математика и се нуждае от внимателно изследване. Основното в психическия процес „разбиране на ново понятие, обяснявано чрез средствата на езика е и съотнасянето му и обвързването му с преди това разбрани понятия. Този подход е особено наложителен при т.нар. абстрактни понятия, каквито са математическите“ (Минчева 2010: 10).

От използването на първични математически понятия в първи клас до въвеждането на пространствени понятия в системния училищен курс по геометрия учениците изучават елементи на геометрични фигури, които са и част от елементите и на правилна пирамида, т.е. разглеждането на понятието „пирамида“ отразява разглеждане и на много планиметрични и стереометрични понятия. Затова изследването на елементи от изучаване на пирамида и правилна пирамида (теоретични бележки и задачи) и прилагането на математически софтуер е от значение за усъвършенстване и осъвременяване на обучението по математика. Използването на GeoGebra води и до повишен интерес на обучаемите при изучаване на геометрия.

БЕЛЕЖКИ

Богданова, Никова, Георгиева 2002: Богданова, А. М., С. К. Никова, Д. Н. Георгиева. *Учебник по математика за първи клас*. София: „Булвест 2000“, 129 с. // **Bogdanova, Nikova, Georgieva 2002:** Bogdanova, A. M., S. K. Nikova, D.N. Georgieva. *Uchebnik po matematika za parvi klas*. Sofia: Bulvest 2000, 129 s.

Богданова, Никова, Георгиева 2007: Богданова, А. М., С. К. Никова, Д. Н. Георгиева. *Учебник по математика за втори клас*. София: „Булвест 2000“ – 118 с. // **Bogdanova, Nikova, Georgieva 2007:** Bogdanova, A.M., S.K. Nikova, D.N. Georgieva. *Uchebnik po matematika za втори клас*. Sofia: Bulvest 2000, 118 s.

Богданова, Никова, Георгиева 2008: Богданова, А. М., С. К., Никова, Д. Н. Георгиева. *Учебник по математика за трети клас*. София: „Булвест 2000“ 122 с. // **Bogdanova, Nikova, Georgieva 2008:** Bogdanova, A. M., Nikova, S. K., Georgieva, D. N. 2008: *Uchebnik po matematika za трети клас*. Sofia: Bulvest 2000, 122 s.

Богданова, Никова, Георгиева 2009: Богданова, А.М., С. К., Никова, Д. Н. Георгиева. *Учебник по математика за четвърти клас*. София: Булвест 2000, – 141 с. // **Bogdanova, Nikova, Georgieva 2008:** Bogdanova, A. M., S. K., Nikova, D. N. Georgieva. *Uchebnik po matematika za tretii klas*. Sofia: Bulvest 2000, 122 s.

Буюклиева, Минчева, Накова 2017: Буюклиева, С., И. Минчева, Г. Накова: Десети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. // *Математика*, № 4, 25–30. София: Стилует ЕООД. // **Buyuklieva, S., I. Mincheva, G. Nakova. 2017:** Deseti matematicheski turnir na Velikotarnovskiya universitet za uchenitsi ot 11. i 12. klas. *Matematika*, № 4, 25–30. Sofia: Stiluet EOOD.

Буюклиева, Минчева, Накова 2016: Буюклиева, С., И. Минчева, Г. Накова. Девети математически турнир на Великотърновския университет за ученици от 11. и 12. клас. // *Математика*, № 3, 37–41. София: Стилует ЕООД. // **Buyuklieva, Mincheva, Nakova. 2016:** Buyuklieva, S., I. Mincheva, G. Nakova. Deveti matematicheski turnir na Velikotarnovskiya universitet za uchenitsi ot 11. i 12. klas. // *Matematika*, №3, 37–41. Sofia: Stiluet EOOD.

Витанов, Дилкина, Джонджорова, Тодорова, Иванова 2017: Витанов, Т., Л. Дилкина, И. Джонджорова, П. Тодорова, Н. Иванова: *Учебник по математика за 6. клас*. София: ИК Анупис ООД, 139 с. // **Vitanov, Dilkina, Dzhondzhorova, Todorova, Ivanova 2017:** Vitanov, T., L. Dilkina, I. Dzhondzhorova, P. Todorova, N. Ivanova. *Uchebnik po matematika za 6. klas*. Sofia: IK Anubis OOD, 139 s.

Колягин, Луканкин, Мокрушин, Оганесян, Пиручин, Саннинский 1980: Колягин, М. Ю., Л. Г. Луканкин, Л. Е. Мокрушин, А. В. Оганесян, Ф. Л. Пиручин, Я. В. Саннинский. *Методика на преподаването по математика в средното училище. Частни методики*. София: ДИ Народна просвета, 516 с. // **Kolyagin, Lukankin, Mokrushin, Oganesyanyan, Piruchin, Sanninskiy, 1980:** Kolyagin, M. Yu., L. G. Lukankin, L. E. Mokrushin, A. V. Oganesyanyan, F. L. Piruchin, Ya. V. Sanninskiy. *Metodika na prepodavaneto po matematika v srednoto uchilishte. Chastni metodiki*. Sofia: DI Narodna prosveta, 516 s.

Минчева 2010а: Минчева, И. *Методика на обучението по математика в началното училище. Специална част. Избрани глави от общата част*. Пловдив: Астарта, 342 с. // **Mincheva 2010a:** Mincheva, I. *Metodika na obuchenieto po matematika v nachalnoto uchilishte. Spetsialna chast. Izbrani glavi ot obshtata chast*. Plovdiv: Astarta, 342 s.

Минчева 2010б: Минчева, И. *Ръководство за решаване на задачи по училищен курс по геометрия*. Преиздадено, преработено и допълнено издание, Пловдив: Астарта, 270 с. // **Mincheva 2010b:** Mincheva, I. 2010b. *Rakovodstvo za reshavane na zadachi po uchilishten kurs po geometria*. Preizdadeno, preraboteno i dopalno izdanie, Plovdiv: Astarta, 270 s.

Минчева, Ангелова 2018: Минчева, И., Ангелова, Ж. Използване на математически софтуер GeoGebra за решаване на стереометрични задачи в обучението по математика. Сб. от 57-ма годишна научна конференция на РУ§СУ'18. *Нови индустрии, дигитална икономика, общество – проекции на бъдещето*. Русе, 26–27 октомври 2018 г. Ред. М. Върбанова и др. // **Mincheva, Angelova 2018:** Mincheva, I., Zh. Angelova. *Izpolzvanе na matematicheski softuer GeoGebra za reshavane na stereometrichni zadachi v obuchenieto po matematika*. // Sb. ot 57-ma godishna nauchna konferentsiya na RU§SU'18 *Novi industrii, digitalna ikonomika, obshtestvo – proektsii na badeshteto*. Ruse, 26 – 27 oktomvri 2018 g. Red. M. Varbanova i dr.

Паскалев, Паскалева 2004: Паскалев, Г., З. Паскалева. *Учебник по математика за 12. клас*. София: Архимед-ПП, 218 с. // **Paskalev, Paskaleva 2004:** Paskalev, G., Z. Paskaleva. *Uchebnik po matematika za 12. klas*. Sofia: Arhimed-PP, 218 s.

Петкова, Нинова, Топова, Матакиева 2006: Петкова, С., Ю. Нинова, Т. Топова, С. Матакиева. *Учебник математика за 5. клас*. София: Просвета – София АД, 254 с. // **Petkova, Ninova, Tonova, Matakieva 2006:** Petkova, S., Yu., Ninova, T. Tonova, S. Matakieva: *Uchebnik matematika za 5. klas*. Sofia: Prosveta – Sofia AD, 254 s.

Рангелова 2006: Рангелова, П. *Сборник задачи за 11.–12. клас*. Стереометрия. Пловдив: Коала прес, 121 с. // **Rangelova 2006:** Rangelova, P. *Sbornik zadachi za 11.–12. klas*. Stereometria. Plovdiv: Koala pres, 121 s.

Станилов, Лангов, Кучинов, Николов 1987: Станилов, Г., А. Лангов, Й. Кучинов, Д. Николов. *Геометрия за 10. клас*. София: ДИ Народна просвета, 110 с. // **Stanilov, Langov, Kuchinov, Nikolov 1987:** Stanilov, G., A. Langov, Y. Kuchinov, D. Nikolov. *Geometria za 10. klas*. Sofia: DI Narodna prosveta, 110 s.

Mincheva, Angelova 2017: Mincheva, I., J. Angelova. *Constructing geometric figures in GeoGebra*. // Сб. от 56-та международна годишна научна конференция на РУ§СУ'17 *Индустрия 4.0. Бизнес среда. Качество на живот*.