МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ СЪС СРЕДСТВАТА НА АЛГЕБРАТА И МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Виолета Маринова

Математически модели, които се решават със средствата на алгебрата

Последователността в решаването на една задача по алгебричен начин е близка до аритметичния подход, но в същото време има и съществени различия. В аритметиката усилията главно се насочват към търсене на метод за решаване, най-подходящ за разглежданата задача. В алгебрата подходът е единствен – съставяне на уравнение (или неравенство) от съдържанието на задачата. Запазват се обаче такива елементи от процеса на решаване на аритметични задачи като обясненията по време на решаването, проверка и др.

Важен момент при решаването на алгебрични задачи е установяване на зависимости между величините и преводът на тези зависимости на математически език. Този процес изисква така наречената аналитико-синтетична мисловна дейност. Учениците често показват неумение да намират математически отношения в реални ситуации, което води до грешки при съставяне на математически модел на задачата. За отстраняване на този недостатък в 8 клас е необходимо да се направят упражнения, относно приложението на операциите събиране (за увеличаване на дадени величини), умножение (увеличаване на величина няколко пъти), т. е.

– ако **a** е с **к** по-голямо от **b**, то **a** = **b** + к;

– ако **a** е с **к** по-малко от **b**, то **a** = **b** – **к**; или a + k = b;

– ако **a** е с **к** пъти по-голямо от **b**, то **a** = **k.b** (**a/b** = **k, b** ≠ 0)

– ако **a** е с **к** пъти по-малко от **b**, то **a** = **b/k** (**a.k** = **b, k** ≠ 0)

– ако числото **a** се увеличи (намали) с **к** %, то получава се числото **a ± к . a/100=a. (1±к/100)**.

При актуализиране на знанията за приложението на тези свойства, целесъобразно е да направим следните упражнения:

а) Машинописка пише материал за **a** часа, а друга 1,5 пъти по-бавно от нея. Изразете времето на втората машинописка.

б) Една тръба влива 1,2 пъти повече вода в басейн от друга, която влива **x** кубически метра.

в) Времето, необходимо за един кран за разтоварване е с 10% по-голямо от времето **t** на друг кран.

г) Лека кола се връща със скорост с 15 км/h по-голяма от тази на отиване **v**.

След посочените упражнения на учениците се предлага разделението (етапите) на процеса на математическо моделиране.

Въпросът за математическото моделиране със средствата на алгебрата в училище е достатъчно разработен в методико-математическата литература. Всички автори представят моделирането като процес, в който се наблюдават отделни етапи. Според нас решаването на една задача довежда до съставяне и решаване на уравнение или неравенство в алгебрата и може да се определят следните етапи:

1. Въвеждане означения за стойностите на неизвестното.

2. Съставяне на уравнение (неравенство) чрез свързване на алгебрични изрази със знака за равно (=) или знаците: $<$, $>$, $\geq$, $\leq$.

3. Решаване на уравнението (неравенството)

4. Изследване на решението.

5. Проверка на правилността на решаването и пригодността на получените корени.

След четене и усвояване съдържанието на задачата в първия етап се избират означения за стойностите на величините, които не са дадени по условие, но са споменати в съдържанието и ще бъдат използвани в процеса на решаването.

Необходимо е учениците да усвоят няколко положения:

а) Въведените означения трябва да бъдат написани с отбелязване на съответните единични мерки.

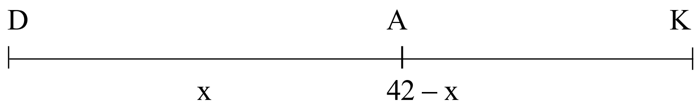
Пример: Не трябва да са пише “**x** – скорост на първия автомобил”. Трябва да се посочи в какви единици е изразена скоростта, а именно “**x** км/h – скорост на първия автомобил”.

б) Обикновено учениците се стремят да означават за неизвестни именно стойностите на онези величини, които трябва да се намерят съгласно съдържанието на задачата. Такъв подход не е задължителен. В много случаи е целесъобразно да се въведат други неизвестни, а след това да се извършат някои допълнителни изчисления. Ако за сметка на такъв избор на неизвестното уравнението се опростява, не трябва да се придържаме към шаблона.

Пример: Да разгледаме следната

Задача II.1: *От два града D и K, разстоянието между които е 42 км, тръгнали едновременно един срещу друг двама велосипедисти. След срещата велосипедистът от D пътувал до К още 9/8 часа, а другият пристигнел в D след два часа. Да се определят скоростите на двамата.*

Учителят чертае следната схема на дъската:



В задачата участват величините скорост, път и време и от тях се търсят скоростите на двамата велосипедисти, но няма директна връзка между тях, следователно за основно неизвестно не можем да изберем търсената в условието на задачата величина. Тогава избираме друга от участващите величини, а за търсената съставяме изрази и след намиране на основното неизвестно пресмятаме числените стойности на съответните изрази. Останаха величините време и път. За тях знаем, че времената на двамата велосипедисти до срещата са равни, а след срещата конкретни числа. Сборът от пътищата до и след срещата е 42 км. Избираме за основно неизвестно – пътят на първия велосипедист до срещата.

$DA + AK = 42$ km, $\quad DA = x \quad \Rightarrow \quad AK = 42 - x$

За скоростите след срещата получаваме изразите:

$\mathbf{V_1} . 9/8 = 42 - x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_1} = (42 - x)8/9$

$\mathbf{V_2} . 2 = x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_2} = x/2$

Основание за времето намираме от движението до срещата – времената им са равни:

$\mathbf{V_1 . t_{cp} = x \qquad t_{cp} = x / V_1 = (9x)/8(42-x)}$

$\mathbf{V_2 . t_{cp} = 42 - x \qquad t_{cp} = (84 - 2x)/x}$

$\Rightarrow 9x/8(42-x) = (84-2x)/x, \ 0 < x < 42$

Отг. $\mathbf{V_1} = 16$ km/h

$\mathbf{V_2} = 12$km/h

В повечето случаи трябва да се ръководим от търсеното в задачата при избор на неизвестно.

Примери:

1. Намерете скоростта на колата на отиване, ако …
2. С каква скорост е трябвало да се движи влак, ако …

Умението да се прави сполучлив избор на неизвестното се създава с решаването на задачи. При задачи в които се търсят стойностите на две или поведе величини е необходимо да установим дали е дадена непосредствена зависимост между тях и тогава да изберем за неизвестно едната величина, а другата да изразим с нея.

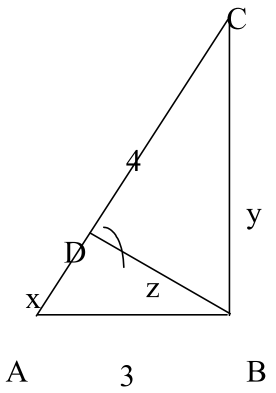
Пример: За колко часа всяка тръба сама пълни басейна, ако едната пълни басейна 5 часа по-бързо от другата?

I н.	I тръба $\to$ x h	II н.	I тръба $\to$ (x – 5) h
II тръба $\to$ (x – 5) h			II тръба $\to$ x h

в) обикновено учениците се стремят да съставят уравнение (неравенство) с едно неизвестно и система уравнения с възможно най-малък брой неизвестни. Това невинаги е най-краткият път за решаване. Да се състави система уравнения с няколко неизвестни е по-лесно, отколкото да се състави едно сложно уравнение с едно неизвестно.

Пример: Да разгледаме следната

Задача II.2: **В ΔABC ъгъл B е прав, а BD е височината към хипотенузата му. Дадено е, че AB = 3 см, а DC = 4 см. Да се намерят отсечките AD, BC и BD с точност до 0,1 см.**



Означаваме дължините на търсените отсечки с:

AD = x см; BC = y см; BD = z см.

Прилагаме Питагоровата теорема, приложена за $_\Delta$ABC и получаваме

$x^2 + z^2 = 9$.

В $_\Delta$BCD прилагаме Питагоровата теорема => $y^2 - z^2 = 16$. От свойството на височината в правоъгълния $_\Delta$**ABC** => $z^2 = 4x$.

Така получаваме следния модел (система от втора степен с три неизвестни):

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + z^2 = 9 \\ y^2 - z^2 = 16 \\ z^2 = 4x \end{array} \right. \qquad x, y, z > 0$$

която трябва да решим в множеството на положителните реални числа, защото с x, y, z сме означили дължини на отсечки.

Учениците от 9 клас могат да решат тази система, тъй като умеят да решават някои системи рационални и ирационални уравнения с двенеизвестни чрез заместване, събиране, освобождаване от знаменател, въвеждане на помощни неизвестни. Със същите методи се решават и някои системи с повече неизвестни.

Заместваме в първото и второто уравнение z^2 с 4x и ще получим система с две неизвестни:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 4x = 9 \\ y^2 - 4x = 16 \end{array} \right.$$

От първото уравнение получаваме $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{13}$. Тъй като $x > 0$, то вземаме само $x_1 = -2 + \sqrt{13}$ и го заместваме във второто уравнение. Получаваме

$y^2 - 4(-2 + \sqrt{13}) = 16.$ => $y = \sqrt{\left(8 + 4\sqrt{13}\right)}$.

За $z^2 = 4x$ имаме $z^2 = 4(-2 + \sqrt{13})$, $z = \sqrt{\left(8 + 4\sqrt{13}\right)}$. Търсените дължини, изчислени приблизително с точност до 0,1 см са: AD $\approx$ 1,6 см, BC $\approx$ 4,7 см, BD $\approx$ 2,5 см.

Ако се опитаме да съставим система с по-малко неизвестни, то трябва да извършим доста сложни разсъждения.

В процеса на съставяне на уравненията или системата уравнения могат да бъдат използвани величини, които след това отпадат и няма да бъдат определяни. Например в

Задача II.3: *Двама велосипедисти тръгнали едновременно от пунктове А и В един срещу друг и се срещнали в средата на деня в пункта М. Ако първия би тръгнал 30 min по-рано, отколкото в действителност, а вторият – с 30 min по-късно, отколкото в действителност, то срещата им би станала на 7200 метра от М. Да се определят скоростите на велосипедистите.*

По данните от условието не може да се определи разстоянието между А и В. Не може да се намери и фактическото време за движение на велосипедистите. Но ако се опитаме при съставянето на системата да използваме само две неизвестни, ще се наложи да се проведат твърде сложни разсъждения.

Нека скоростите на велосипедистите да са съответно равни на x км/h и y км/h, а разстоянието от А до В да е равно на S km/h. В такъв случай времето за движение е равно на S/(x+y) h. Ако първият би тръгнал половин час по-рано, а вторият – половин час по-късно, отколкото в действителност, то до тръгването на втория първият би изминал x км (той е пътувал 1 час). След това двамата изминали до срещата (S-x) км, т.е. те са пътували (S-x)/(x-y) часа. Според текста на задачата стигаме до уравнението

$$1+\frac{S-x}{x+y}=\frac{1}{2}+\frac{S}{x+y}+\frac{1}{10}$$

Вторият велосипедист изминал до срещата разстоянието

$$\frac{S.y}{x+y}\text{км}$$

Ако той би тръгнал половин час по-рано, а първият — половин час по-късно, отколкото в действителност, то до тръгването вторият би изминал y км (той е пътувал 1 час). От останалите (S-y) km той е изминал

$$\frac{(S-y)y}{x+y}\text{км}$$

Според условието получаваме още едно уравнение:

$$\text{y}+\frac{(S-y).y}{x+y}=\frac{S.y}{x+y}+7.2$$

След преобразуването на тези уравнения получаваме система, в която S не участва:

$$\frac{x}{x+y}=\frac{2}{5} \qquad x > 0$$

$$\frac{x.y}{x+y}=7.2 \qquad y > 0$$

Отг. x = 12 km/h, y = 18 km/h.

Най-трудни се оказват тези с параметър. Съставянето на математически модел следва направените по-горе разсъждения. Основната цел е да сведем полученото уравнение (неравенство) до познато уравнение (неравенство), за което имаме алгоритъм за решаване. Например в

Задача II.4: *От две парчета сплав на мед и цинк едното съдържа p% мед, а другото q%. В какво отношение трябва да се вземат парчетата от двете сплави, за да се получи сплав, която r% мед?*

От I сплав – x kg. Количеството мед в I парче е $\frac{p.x}{100}$

От II сплав – y kg мед. Количеството мед във II парче е $\frac{p.y}{100}$

Търси се $\frac{x}{y}$

Количеството мед в новата сплав е $\frac{r}{100}(x+y)$

Получаваме следния математически модел:

$$\frac{p}{100}x+\frac{q}{100}y=\frac{r}{100}(x+y)/100$$

px + qy = r (x + y) – едно уравнение с две неизвестни. То е неопределено и при решаването му едното неизвестно приемаме за параметър и решаваме относно другото. От тази задача ни интересува отношението на x и y. Преработваме уравнението

px + qy = rx + ry =>

$\frac{x}{y}=\frac{r-q}{p-r}$ но $\frac{r-q}{p-r}$ >0 =>

(r – q) (r – p) < 0 => q < r < p \/ p < r < q

И така, получаваме, че при $r \in (q, p)$, ако $q < p$ или
$r \in (p, q)$, ако $p < q$,
търсеното отношение, в което трябва да се вземат парчетата от двете сплави, за да се получи сплав, съдържаща r %, мед, се изчислява по формулата:

$$\frac{r-q}{p-r}$$

Вторият етап от решаването на една текстова задача е решаващ. Въпреки че по въпроса за съставянето на уравнения (неравенства), според текста на дадена задача са написани немалко книги, единен алгоритъм не е открит. На учениците се показва един от възможните пътища за разсъждаване.

В съответствие със съдържанието една и съща величина учениците се стараят да изразят с помощта на въведените неизвестни и дадените в текста параметри по два различни начина. Тук може да се приложи използването на свойства на алгебричните операции и закони, валидни за други учебни дисциплини. После трябва да се открие между кои от изразите може да се постави знак за равенство (неравенство), в резултат на което получаваме уравнение (системи уравнения, неравенства и др.), т.е. модел на задачата. Възможно е в условието на задачата да липсва термина "равно", а да са използвани изразите – "също толкова", "за същото време" и др., които се изразяват математически със знака за равенство. Друга възможност е връзката между стойностите на някакви величини да се изразява с думите "повече с...", "no-малко с...", "по-голямо... пъти". Именно по такъв начин бяха съставени уравнения в задачата за велосипедистите: при първия велосипедист (ако той би тръгнал по-рано, отколкото в действителност), а при второто уравнение е определено колко би изминал втория велосипедист до срещата (ако той би тръгнал по-рано). Ако зависимостите между величините се изразяват с ''най-много за…", "не повече от...", то получаваме неравенство. Да разгледаме следния пример:

Задача II.5: *Кораб за не повече от 4 часа трябвало да измине 140 км по течението на някаква река и 124 км срещу течението ѝ. Каква трябва да бъде скоростта на кораба в спокойна вода, ако скоростта на течението е 4 км/h?*

Тук се използва формулата за движение с постоянна скорост S=v.t. Кораб извършва два вида движение – срещу и по течението. За основните величини знаем, че

$S_1 = 140$ km $\quad S_2 = 124$ km $\quad$ v – скорост на кораба

$V_1 = v + 4 \quad V_2 = v - 4$ $\quad$ в спокойна вода

$t_1 + t_2 \le 4$

За неизвестно избираме търсената в условието на задачата величина – скоростта на кораба в спокойни води.

$V = x \qquad V_1 = v + 4 \qquad V_2 = v - 4$

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{140}{x+4} \qquad t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{124}{x-4}$$

И така, достигнахме до следния математически модел на задачата:

$$\frac{140}{x+4} + \frac{124}{x-4} \le 4 \ , \qquad x > 0.$$

Отговор: Скоростта трябва да е по-голяма от 66 км/h.

Понякога съставянето на уравнение се съпровожда с подробни пояснения (писмени или устни), но допустимо е и воденето на по-сбито записване. Тук имаме предвид съставянето на уравнения (неравенства) с помощта на таблица. Ще покажем такова записване с предната задача (зад. II. 5) за кораба.

След въвеждането на означението за скоростта на кораба x км/h може да се попълни следната таблица:

	Скорост km/h	**разстояние km**	**време h**
по течението	x + 4	140	$\frac{140}{x+4}$
срещу течението	x – 4	124	$\frac{124}{x-4}$
Всичко	-		$\frac{140}{x+4} + \frac{124}{x-4} \le 4$

Таблици могат да се използват в случаи, когато не се изисква пълно писмено обяснение. Таблиците имат и отрицателна страна: водят до схематизъм, до шаблон. Да отбележим, че математическият модел е зададен, ако са дадени допустимите стойности за участващите в него неизвестни, параметри и др.

Третият етап в процеса на моделиране на текстовата задача с алгебрични средства се състои в решаване на получения модел. Като всеки ученик от по-горен клас има по-голям запас от знания за решаване на различни математически модели. Решаването на модела обикновено не предизвиква сериозни затруднения. В някои случаи учениците могат даже напълно или частично да решат уравнението устно. Пример за такова решаване може да бъде използването на теоремата на Виет при решаването на квадратно уравнение. При решаване на математически модел, учениците трябва да се научат да съблюдават условията, при които математическият модел описва процесите.

Пример 1: Ако се решава уравнението

$$\frac{120}{20-x}+\frac{80}{x-5}=28 \ ,$$

то преди привеждането на двете части към общ знаменател трябва да се отбележи, че $x \neq 20$ и $x \neq 5$.

Пример 2: Ако се решава ирационално уравнение (ирационалните уравнения се използват за решаване на много практически задачи – при обогатяване на руди, пресмятане на машинни части, конструиране на машини и др.).

$$\sqrt{-x}=\sqrt{5}+x+1$$

то преди да се повдигнат на квадрат лявата и дясната страна на уравнението, трябва да от бележим, че

$$x \geq -1-\sqrt{5} \text{ и } x \leq 0$$

Голяма част от учениците смятат, че решението на текстова задача завършва с получаване на решенията на съответния модел. Необходимо е да демонстрираме задачи, при които се получава несъответствие между решението на математическия модел със смисъла на задачата. Затова не трябва да се пропуска последния етап в процеса на решаване на текстова задача за установяване на кои от решенията на модела са решения на задачата. У учениците може да възникне въпросът: “Защо съставеният модел дава “лъжлива” информация за действителното положение на нещата, след като сме работили математически вярно?” Учителят трябва много добре да обясни, че самия математически модел не отразява пълно реалната ситуация, ако не сме изразили смисловите ограничения за стойностите на величините, които влизат в задачата, т.е., ако не сме съставили адекватен на явлението математически модел. Поради това е наложително да се провери удовлетворяват ли решението на модела условието и изискването в задачата, като се държи сметка за смисловите ограничения за стойностите на величините, с които се срещаме в хода на проверката.

В много случаи несъответствието между решението на модела със смисъла на задачата става очевидно.

Примери:

1. Ако стойността на променливата x от съставения модел по смисъла на задачата изразява дължина, време, скорости и др. е отрицателно число, не може да бъде решение на задачата.

2. Ако стойността на неизвестното x от съставения модел, изразяващо по смисъла на задачата брой (хора, детайли и др.) е дробно число или по-общо, не е естествено число, то дори и да е решение на модела, няма да е решение на задачата.

3. Получава се стойност на неизвестното от модела, нереална по големина спрямо стойностите, които може да получава. (Например, $x = 135$, където x е скорост на движение на човек.) Такова оглеждане на корените и отхвърлянето им след съответна проверка от смисъла на задачата е задължително. Към това трябва да се приучат учениците.

Проверката на решаването в алгебрата трябва да се отличава от аналогичната проверка в курса по аритметика. За съжаление на практика много често се среща погрешна проверка. Става дума за проверката на намерен и отхвърлен корен чрез заместване в уравнението (неравенството). Така се проверява само правилността на решаване на модела, но не и на задачата. Ако моделът е съставен невярно, с такава “проверка” това няма да се открие. Имайки предвид многото грешки, налага се специално да се покаже как се проверява решаването на алгебрична задача.

И така, може да се даде следното правило за извършване на проверка: при стойностите на променливата, равна на корена на модела, да се пресметнат по ред стойностите на участващите в задачата величини. Ако стойностите на някоя величина се окаже извън границите на допустимите по смисъла на задачата стойности, то проверяваното решение не може да служи за решение на задачата.

За да оценят учениците преимуществото на решаването на задачи с помощта на алгебрата, необходимо е да се решат няколко аритметични задачи със средствата на алгебрата. Например, като сравняват решената по-горе задача I.5 за разходите на двете лица с нейното алгебрично изложение във вид на уравнението

$$440 - 35.x = 4.(400 - 50x),$$

учениците ще разберат, че умението да се съставят уравнения (неравенства) увеличава твърде много възможностите за решаване на възникващи задачи.

Трябва да се прави предварително определяне пътищата на решаване на алгебрична задача преди започване на решаването с цел да се облекчат учениците при създаването на необходимите умения и навици.

Всяко занятие, в което се решават текстови задачи, чиито математически модел се решава със средствата на алгебрата, трябва да завърши с обобщаване на направеното. Съвместно с учениците могат да се направят следните разсъждения:

При **първата група** задачи знаем формулата, която свързва участващите величини. При тях имаме две ситуации и едноименните величини или са конкретни числа, или между тях съществува директна връзка. След като опишем съществуващите величини, правим избор на основно неизвестно, като най-често то е една от търсените величини. Основание за равенство (неравенство) дава връзката между другите величини. Това са задачи: II.1, II.2, II.3, II.5.

Можем да разграничим **втори тип** задачи, при които между участващите величини има обратнопропорционална зависимост. Най-често това са задачи от работа и басейни. И в двете ситуации имаме директна връзка между времената на двамата участници, за които те могат да свършат цялата работа. Изразяваме каква част от работата може да свърши всеки за единица време (1 час, 1 ден и т.н.).

Следвайки условието на задачата съставяме уравнение (неравенство).

Например, задача II.4. Да разгледаме още един пример от втория тип задачи.

Задача II.6. *Една тръба пълни басейн три часа по-бързо от втора. Ако се отворят двете тръби и след десет часа се затвори първата, втората ще го допълни за още 5 часа и 45 минути. За колко време всяка тръба сама пълни басейна?*

Решение: Едната тръба пълни басейн за x часа. Тогава за един час ще напълни 1/x от басейна. Втората тръба пълни басейна за (x + 3) часа. Тогава за един час ще напълни 1/(x + 3) част от басейна. Следователно за един час двете тръби ще напълнят заедно

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)$ част от басейна, а 10 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)$ част за 10 часа.

Получаваме следния математически модел:

$$10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)+5\frac{45}{60}.\frac{1}{x+3}=1, \quad x > 0.$$

$x_1 = -5/4$, $\qquad x_2 = 24$

Връщаме се към текста на задачата, с x сме означили времето, за което първата тръба сама пълни басейна. Следователно допустимите стойности за x са $x > 0 \quad x + 3 > 0 \quad x + 3 > 0$

$x_1 = -5/4 < 0 \Rightarrow$ не е решение на задачата,

$x_2 = 24 > 0 \Rightarrow$ е решение.

Отг.: I тръба сама пълни басейна за 24 часа,
II тръба – за 27 часа.

При третия тип задачи нямаме готова формула, която да свързва участващите величини. Провеждаме разсъждения по условието на задачата със знанията и житейския опит, който имаме и съставяме израз, равен на една от дадените величини. Например:

Задача II.7: *Ученици от един клас си разменили снимки, като всеки дал по една своя снимка на всички съученици. Колко са били учениците, ако броят на раздадените снимки е 992?*

Решение: Нека търсеният брой ученици означим с x. Всеки ученик е раздал по $(x-1)$ снимки. А броят на раздадените снимки е $x(x-1)$, следователно математическият модел на задачата е:

$$x(x-1) = 992, \quad x \in N.$$

$$x_1 = -31, \qquad x_2 = 32$$

Връщаме се в условието на задачата – с x означихме броя на учениците $x \in N$.

$-31 \notin N \Rightarrow$ не е решение на задачата,

$32 \in N \Rightarrow$ е решение.

Отг.: Броят на учениците е 32.

Друг тип задачи са задачите с параметър (задача II. 4). Съставянето на математическия модел следва направените по-горе разсъждения. Основната цел е да се сведе полученото уравнение (неравенство) до уравнение (неравенство) с параметър, за което имаме алгоритъм на решаване.

Съществен момент при всички задачи е налагането на ограничения за получените отговори по смисъла на задачите.

Математически модели, които се решават със средствата на математическия анализ

Изученото по аритметика (изменение на резултатите на действието във връзка с изменение на компонентите, изменение големината на дробта във връзка с изменение на нейните елементи, правата пропорционалност и обратната пропорционалност между величините участващи в задачите), изучаването на геометрия (изменение дължината на окръжността във връзка с изменение на радиуса, измерването на лицата на правоъгълника и кръга, измерването обемите на куб, греда и цилиндър, симетрия, сумата от ъглите на изпъкналия многоъгълник), изучаването на алгебрата (числена стойност на алгебричен израз, съставяне на уравнение (неравенство) по условията на задача, решаване на система уравнения) и запознаването с физичните закони, които дават зависимости между величините, участващи в изучаваното явление, дава възможност учениците да натрупат богат материал за най-различни зависимости. Всичко това постепенно е подготвило съзнанието на учениците към възприемане на определение на понятието “функция”.

Изучаването на понятието “функция” започва в 8 клас. В този и в следващите класове до въвеждането на понятието “производна” се въвеждат и изучават следните функции:

1) права пропорционалност $y = a . x$

2) обратна пропорционалност $y = a / x$ с дефиниционна област – множеството на реалните числа R без нулата, т.е. $R \setminus \{0\}$

3) линейна функция $y = a. x + b$

4) квадратна функция $y = a. x^2 + b. x + c$, $a \neq 0$

5) тригонометричните функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$,

$x \neq (2k + 1).\pi/2$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq k\pi$; $x \in R$.

6) показателна функция $y = a^x$ при $a>0$, $a \neq 1$, $x \in R$.

7) логаритмична функция $y = \log_a x$ при $a>0$, $a \neq 1$, с дефиниционна област – множеството на всички реални числа.

Под изследване на функция се разбира нейното изучаване, което се състои от изясняване на:

1) дефиниционна област;

2) областта на стойностите на функцията;

3) характера на изменение (поведение) на функцията.

“Поведението” на една функция е сложно понятие и то може да се изследва в различни степени – с изучаване на повече или по-малко свойства в зависимост от равнището, на което се провежда изследването и от използваните средства. При изследването на поведението на функциите може да се включва изясняването на такива свойства като растене, намаляване, наличност на максимум или минимум, четност, нечетност, периодичност, непериодичност.

А) Изследване на функция с елементарни средства

Под изследване на функция с елементарни средства се разбира изучаването на функцията със средствата на елементарната математика, т.е. без да се използват понятията граница и производна.

Тъй като в училищния курс се въвежда понятието “производна” и затова се отделя малко внимание на изследването на функции с елементарни средства. Това е така, защото се изучават много по-широк клас функции, и е нецелесъобразно изследване на функции с елементарни средства.

Обаче изследването с елементарни средства си остава за тези функции, които се изучават до въвеждането на производна ($y = a.x + b$);

$y = k / x$; $y = a.x^2$; $y = a.x^3$; $y = |x|$; $y = a^x$; $y = \log_a x$). Изследването на квадратната функция в общия вид ($y = a.x^2 + b.x + c$) се предлага да стане с помощта на производна. Има се предвид също и повторно, по-задълбочено изследване на показателната и логаритмичната функция, след като се въведе производна.

Във връзка с въвеждането на производна елементарното изследване на функциите, което предхожда това въвеждане трябва да подготвя изучаването на производна на функция и нейното приложение за изследване на функции.

1. Изучаване на линейна функция с елементарни средства

а) Физиката ни предлага многобройни примери, които обосновават необходимостта от изучаването на функцията, която се изразява с уравнението $y = a.x + b$, дефинирана върху множеството R на реалните числа.

Така например, като се изхожда от уравненията на равномерното движение $s = v.t$ и $s = s_0 + v.t$ се достига до необходимостта от изучаването на функции, изразявани с уравненията $y = a.x$ и $y = a.x + b$. Много преди да се изучава производна на функция, учениците научават, че ъгловият коефициент **<u>а</u>** на правата $y = a.x + b$ е равен на скоростта на движението. Тук **y** означава пътя, а **x** – времето.

Но уравненията $y = a.x$ и $y = a.x + b$ имат и други физически модели: те могат да изразяват скоростта в равнопроменливото движение като функция на времето

$v = a.t$ и $v = v_0 + a.t$

или обема и налягането на газа

$v = v_0 (1 + .t)$ и $p = p_0 (1 + .t)$,

като функция на температурата (при определени физически условия).

б) Подготовката за изучаване на линейната функция естествено трябва да започне преди въвеждането на това понятие в явен вид.

Пример (за прехода от табличното задаване на функция, дефинирана върху крайно множество, към формулата $y = a.x + b$)

X	Y
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Табл. 1

Да се реши следната задача: *Зададено е съответствието между стойностите на променливите x и y, посредством таблица 1. Да се посочи такова правило, с помощта на което на всяка стойност на x (от множеството {1, 2, 3, 4, 5}) може да се определи съответстващата и стойност на y (или за първи елемент на коя да е двойка (x, y) да се определи втория ѝ елемент).*

Преди всичко чрез тези задачи учениците се учат да опитат различни начини, с помощта на които може да се получи 5 от 1; 7 от 2; 9 от 3; 11 от 4; 13 от 5. Например: 5 може да се получи от 1, като се прибави към 1 числото 4, но ако приложим този начин за 2, ще се получи 6, а не 7. От 1 може да се получи 5, като умножим 1 с 5, но по този начин от 2 се получава 10, а не 7 следователно тези два начина отпадат. Във всеки от тях е използвано само едно действие – събиране или умножение. Да се опитаме да използваме едновременно тези две действия. Опитваме така още няколко начина докато установим, че 5 може да се получи от 1 и като умножим 1 с 2 и прибавим 3 (1.2 + 3 = 5). Като приложим този начин към останалите стойности на променливата x:

2 . 2 + 3 = 7; 3 . 2 + 3 = 9; 4 . 2 + 3 = 11, 5 . 2 + 3 = 13.

Този начин е подходящ. Намерихме правило, с помощта на което за всички стойности на променливата x получаваме съответната ѝ стойност на променливата y. Това правило се състои в следното:

1) Стойността на **x** умножаваме с 2.

2) Към полученото произведение прибавяме 3. Сега остава да запишем намереното правило с помощта на формула. Това се постига с **обобщаване** (запазване в записаните равенства на всичко, което е общо за тях) и **абстрахиране** (изпускане на всичко онова, по което те се отличават, т.е. различните стойности за x и y).

Получаваме формулата: 2. x + 3 = y

б) Изучаването на линейната функция започва с разглеждането на частни случаи: y = a.x; y = – x; y = 2.x; y = – 2.x; y = (1/2) x; y = (-1/2) x и др, които водят до редица обобщения.

Графиките на тези функции се построяват с помощта “на точки”. Като се направят няколко точки от графиката, открива се, че те лежат на една права. Тази хипотеза е получена в резултат на индуктивно разсъждение: свойството колинеарност на точките от графиката, открито за няколко точки, се разпространява за всички точки на графиката.

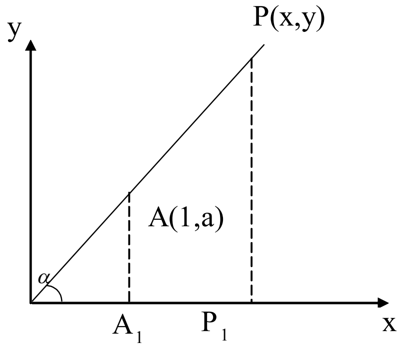
в) Наистина, графиката на функцията $y = a.x$, т.е.

$\Gamma_f = M \underset{(x,y)}{} [(x,y) \in R^2 \text{ I } y = a.x]$

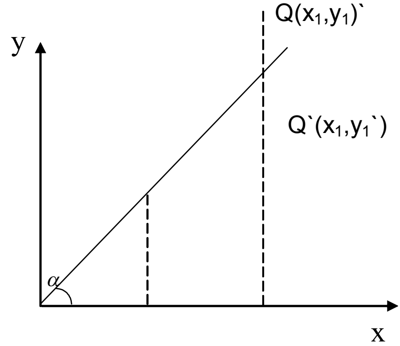
е правата OA, където O (0,0) и A (1,a)

Тъй като Γ_f и OA са множества, то за да докажем, че $OA = \Gamma_f$ е достатъчно да се докаже, че $OA \subseteq \Gamma_f$ $\Gamma_f \subseteq OA$.

1) Ще докажем, че $\forall (x,y) [(x,y) \in OA \Rightarrow (x,y) \in \Gamma_f$



Черт. 1



Черт. 2

Нека P(x,y) е произволна точка от правата OA (черт. 1), т.е. $(x,y) \in OA$

$\Delta OAA_1 \sim \Delta OPP_1 \Rightarrow PP_1 / OP_1 = AA_1 / OA_1$, т.е. $y/x = a/1 \Rightarrow y = a.x$ $\Rightarrow (x,y) \in OA \Rightarrow y = a.x$ и тъй като $(x,y) \in R^2 \Rightarrow (x,y) \in R^2 \wedge y = a.x$, т.е. $(x,y) \in \Gamma_f$

2) Ще докажем, че $(\forall(x, y)) [(x, y) \in \Gamma_f \Rightarrow (x, y) \in OA]$ или еквивалентното му твърдение $(\forall (x, y)) [(x, y) \notin OA \Rightarrow (x, y) \in \Gamma_f]$

Нека Q (x_1, y_1) (черт. 2) е произволна точка, която не лежи на правата OA, т.е. $(x_1, y_1) \Rightarrow$ на OA. Построяваме права през Q, която е перпендикулярна на **Ox**. Тази права пресича OA в някаква точка Q` (в противен случай за стойността x_1 няма да съществува стойност на функцията, което противоречи на условието, че функцията е определена върху множеството R).

Нека $Q'(x_1', y_1')$. Тогава от доказаното в (1) следва, че $y_1' = \mathbf{a.x_1}$, **но** $\mathbf{y_1 \neq y_1'} \Rightarrow \mathbf{y_1 \neq a.x_1} \Rightarrow (x_1, y_1) \in R^2$ $y_1' \neq a.x_1$, т.е. $(x_1, y_1) \notin \Gamma_f$. С това доказателството е завършено.

д) Индуктивното разсъждение, което се основава на частни случаи, води до още една хипотеза: коефициентът **a** по определен начин е свързан с ъгъла, определен от правата OA и положителната посока, на оста Ox. Ако $a > 0$, то този ъгъл е остър и правата минава през първи и трети квадрант, а ако $a < 0$, то този ъгъл е тъп и правата минава през втори и четвърти квадрант. С увеличаването на абсолютната стойност на **a** се увеличава и този ъгъл.

Тези наблюдения подсказват откриването на зависимостта $a = tg\ x$, която лесно се вижда от AOA_1. (черт. 1).

Важно е да се изясни и "механичния" смисъл на коефициента **a**. Да вземем някаква стойност x_0 на аргумента, която да увеличим с 1, т.е. да преминем към новата стойност на аргумента $x = x_0 + 1$ (в този случай се казва, че аргумента е получил нарастване 1). На всяка, стойност на аргумента съответства определена стойност на функцията:

$x_0 \to y_0 = a.x_0$

$x \to y = a.x = a\,(x_0 + 1)$.

стойността на функцията се е изменила с $y - y_0 = a$

Така получихме, че коефициентът **a** е коефициент на нарастване на функцията, когато нарастването на аргумента е равно на 1.

Ако разгледаме механичният модел на уравнението $y = a.x$, в което **y** е пътя, а **x** – времето, то **a** е скоростта, т.е. изменението на пътя за единица време.

Или: **a** е скоростта на изменение на функцията, т.е. това изменение, което получава функцията, когато стойността на аргумента се изменя с 1.

е) С цел да се направи преход от функцията $f{:}x \to a.x,\ x \in R$ към функцията $f_1{:}\ x \to a.x + b,\ x \in R$ е целесъобразно да се разгледат редица частни случаи.

Фиксира се стойността на коефициента **a** и се разглеждат функции, които се изразяват с уравненията:

$y = 2.x$; $y = 2.x + 1$; $y = 2.x - 1$; $y = 2.\ x + 3$;
$y = 2.\ x - 3$ и др.

Индуктивното разсъждение довежда до хипотезата: графиката на функцията f_1 е права, която е успоредна на графиката на f и отсича от оста O_y отсечка с дължина, равна на | b |, т.е. $Г_{f1} \parallel Г_f \wedge Г_{f1} \cap O_y = (O,b)$

Тази хипотеза се доказва лесно.

$(\forall (x,y)) [(x,y) \in Г_f \wedge (x,y+b) \in Г_{f1}]$

и за това $Г_{f1}$ може да се получи от графиката на функцията f с успоредно пренасяне с вектор на пренасянето $\vec{b}$; при което $\vec{b}$ е еднопосочен с вектора $\vec{O}_y$ ($\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{O}_y$, ако b > 0 и противопосочен на него ($\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{O}_y$), ако b < 0.

Тъй като $Г_f$ е права, а успоредното пренасяне преобразува права в успоредна на нея права, а $Г_{f1} \parallel Г_f$ и тъй като $(O,b) \in Г_{f1}$, то $Г_{f1}$ отсича от оста Оу отсечка с дължина = | b |.

От това, че $Г_{f1} \parallel Г_f$, то коефициентът **a** в уравнението y = a.x + b има същия геометричен и механичен смисъл, какъвто е в уравнението

y = a.x.

ж) В резултат на горните разсъждения се стига до извода, че графиката на всяка линейна функция $f{:}x \to a.x + b$, $x \in R$ е права линия. Затова построяването на графиката на коя да е линейна функция се свежда до намирането на две кои да са нейни точки. Най-често се вземат точките (O,b) и (-b/a,O).

з) От разгледаните частни случаи се стига също и до следното обобщение: ако a > 0, то правата y = a.x + b е разположена така, че ако една точка се движи по правата отляво надясно, то точката се изкачва нагоре, т.е. функцията расте, ако a < 0, то тази движеща се отляво надясно точка се спуска, т.е. функцията намалява.

Тази хипотеза се доказва лесно.

Нека под растяща (намаляваща) функция се разбира:

$(\forall x) [(\Delta x > 0) \wedge (\Delta y > 0)]$ или $(\forall x) [\Delta y/\Delta x > 0]$

$(\forall x) [(\Delta x > 0) \wedge (\Delta y < 0)]$ или $(\forall x) [\Delta y/\Delta x < 0]$

Означаваме с Δx нарастването на аргумента $x - x_o$, а съответното нарастване на функцията $y - y_0$ с Δy

$\Delta y = a.x + b - (a.x_0 + b) = a(x - x_0)$, $\Delta y/\Delta x = a$, $\forall x$ $\Delta y/\Delta x = a$, ако a > 0, функцията е растяща; ако a < 0, функцията е намаляваща, а графиката ѝ е права, успоредна на оста Ox.

и) И така получихме, че $\Delta y = a.\Delta x$, т.е. нарастването на линейната функция е пропорционално на нарастването на аргумента.

Естествено възниква, въпросът: съществуват ли и други функции, които притежават това свойство?

Отговорът на този въпрос се дава от следното

Твърдение. Ако нарастването на една функция f е пропорционално на нарастването на аргумента, то f е линейна функция.

Доказателство: Нека за $\forall x$ $y = a.x$, а за $x = 0$, $y = b$. Вземаме някаква произволна стойност x на аргумента, и нека съответната стойност на функцията $f(x)= y$. Тогава $x = x – 0 = x$ и $y = y – b = a.x + b$.

Схемата, която изложихме, е една от възможните методически схеми за изучаване на линейна функция в 6 и 7 клас. Разбира се, за да се използва в преподаването тази схема има нужда от по-подробна дидактическа обработка и подбиране на конкретни задачи.

Например: Както казахме изучаването на линейна функция започва с разглеждането на частни случаи, които водят да редица обобщения. Такива частни случаи могат да се дадат със следните задачи:

1. Един литър мляко струва 2 лв. Колко лева струват x литра мляко?

Ако означим с y сумата, която струват x литра мляко, получаваме функцията

$y = 2.x$, $x > 0$.

2. Черноморската вода съдържа 1,4% сол. Колко килограма сол се съдържат в x килограма от нея?

Щом черноморската вода съдържа 1,4% сол, тогава 1 кг от нея ще съдържа 0,014 кг сол. Ако означим с y килограмите сол, които се съдържат в x кг вода, ще получим функцията

$y = 0{,}014.x$, $x > 0$

От тези задачи може да се направи обобщение и да се даде на учениците следното

Определение. За две променливи x и y казваме, че са право пропорционални, ако между тях съществува функционалната зависимост от вида

$y = к.x$,

където к е положително или отрицателно число. Числото **к** се нарича коефициент на пропорционалност. (В първата задача к = 2, а във втората к = 0,014.)

Дотук показахме как математическото моделиране на процеси се прилага за най-доброто и леко възприемане на линейната функция. Аналогично може да се постигне в случая с квадратната и други функции.

2. Изучаване на функцията $f:x \Rightarrow a.x^2$, $x \in R$ с елементарни средства.

а) Физиката ни предлага многобройни примери, които обосновават необходимостта от изучаването на функцията $y = a.x^2$, $x \in R$.

Например: Уравнението на равно-променливото движение

$S = V_0.t - a.t^2/2$

и по-специално уравнението на свободното падане на телата $S = gt^2/2$, т.е. квадратната функция служи за моделирането на този вид уравнения.

б) Естествено е да се започне с изследването на функцията $y = x^2$

в) След подробното изучаване на функцията $y = x^2$ може да се предложи на учениците самостоятелно да изследват функцията $y = -x^2$, като използват съпоставяне с първата функция.

г) По-нататък се разглеждат функциите: $y = 2.x^2$; $y = 3.x^2$; $y = ½ x^2$; y = -S! x^2.

Чрез индукция се стига до заключението, че графиката на функцията $y = a.x^2$ ($a > 0$) може да се получи от графиката на функцията $y = x^2$ чрез изместване на всички точки на параболата $y = x^2$ вертикално, така, че разстоянията им от оста Ox да се увеличат **a** пъти (ако $a > 1$) или да се намалят **a** пъти (ако $a < 1$). При такова преобразуване на графиката на всяка функция свойствата ѝ (знак, интервал на растене и намаляване и др.) не се изменят. Затова функцията $y = a.x^2$ ($a > 0$) има същите свойства, които притежава $y = x^2$.

По такъв начин се открива влиянието на коефициента a за "стръмността" на параболата: по-голяма стойност на **a** съответства на "по-стръмна парабола".

д) След подробното изучаване на функцията $y = a.x^2$ ($a > 0$) може да се предложи на учениците самостоятелно да изследват функцията $y = a.x^2$ ($a < 0$), като използват съпоставянето ѝ с вече изучената.

В) Изследване на функция с производни

Въвеждането на понятието "производна" в училищното обучение се прави с цел да се покажат на учениците действителните приложения на производната, едно от основните понятия на математическия анализ.

Главното приложение на производната в курса по математика е приложението ѝ при изследването на функциите. Приложението на производната за приближено решаване на уравнения – методът на допирателните, методът на итерациите – може да бъде тема за факултативни знания.

Измежду задачите, които се решават с помощта на производна, могат да се отделят два класа задачи, които са най-подходящи за училищното обучение:

а) задачи с физическо съдържание, в които производната се използва непосредствено като скорост или ускорение (“скорост на изменение на скоростта”)

Например: да разгледаме задачите:

1. Тяло се движи праволинейно по закона
$S = f(t) = t^3 - 12t^2 + 48t$
Да се намери ускорението в петата и в седмата секунда.

Решение: Ускорението в петата и в седмата секунда ще бъде съответно $f''(5)$ и $f''(7)$ и трябва да намерим втората производна на функцията $S'' = f'(t) = 3t^2 - 24t + 48$; $S'' = f''(t) = 6t - 24$ изчисляваме $f''(5)$ и $f''(7)$ и намираме $f''(5) = 6.5 - 24 = 6$ и $f''(7) = 6.7 - 24 = 18$ следователно ускорението в петата секунда е 6 m/s^2, а в седмата е 18 m/s^2.

2. Тяло се движи праволинейно по закона *S* = 1 – *sin t*. Определете скоростта и ускорението му.

Решение: Скоростта и ускорението ще бъдат съответно S’ и S”. Следователно трябва да намерим първата и втората производна на функцията S.

$v = s' = 1 - \cos t$; $a = s'' = (1 - \cos t)' = \sin t$

б) задачи за намиране на най-голямата и най-малката стойност на функция.

По същество с подобни задачи се срещаме в различни области от практическата дейност, когато възниква въпросът, как да се постъпи, за да се получи с наличните средства най-голям ефект или да се постигне нужният ефект с най-малка загуба на средства (т.е. да се намери оптималното решение).

Пристъпвайки към решаване на подобни задачи, е необходимо предварително да се постигне точно различаване на понятията локален максимум и най-голяма стойност, локален минимум и най-малка стойност на една функция. Затова е целесъобразно да се уточнят интуитивните представи за локален максимум и минимум и да се сравнят техните точни математически определения с определенията на най-големите и най-малките стойности.

$f(x_0) = y_{max} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ такова, че за всяко x, за което $|x - x_0| < \varepsilon$ то $f(x)' \leq f(x_0)$, където $f(x_0)$ е най-голямата стойност на функцията в интервала [a, b] или (a, b), тогава и само тогава, когато за всяко $x \in$ [a, b] или $x \in (a, b)$ то $f(x) \le f(x_0)$.

Аналогично

$f(x_0) = y_{mim} \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ такова, че за всяко x, за което $|x - x_0| < \varepsilon$ е в сила $f(x) \ge f(x_0)$

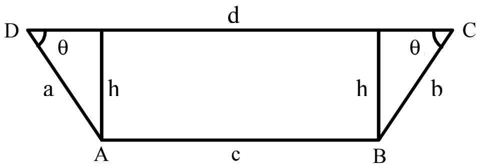
$f(x_0)$ е най-малката стойност на функцията в интервала [a, b] или (a, b), тогава и само тогава, когато за всяко $x \in$ [a, b] или $x \in (a, b)$ то $f(x) \ge f(x_0)$.

От сравняването на тези определения се изяснява, че максималната (минималната) стойност на функцията е само "локално най-голямата (най-малката) стойност", т.е. най-голямата (най-малката) измежду "съседните" стойности или върху някаква околност на x_0.

Графиките на различните функции подсказват, че най-голямата (най-малката) стойност на функцията, в някакъв интервал се достига или в една от точките ма максимума (минимума) или в един от краищата на този интервал. В последния случай решението на практическата задача за намиране на най-голямата или най-малката стойност на функцията не изисква използването на производна. Ако пък най-голямата (най-малката) стойност на функцията е в една от точките на максимума (минимума), то решаването на задачата се свежда до изследване на някоя функция за намиране максимума (минимума) .

Примери:

Задача: *Трябва да се изкопае напоителен канал с напречно сечение трапец и да се облицоват стените и дъното му с еднакви циментови плочи. Какъв ъгъл трябва да сключват бедрата на трапеца с голямата му основа, че да се осигури протичането на най-голямо количество вода за единица време?*



Решение: За единица време ще протече максимално количество вода, когато лицето на напречното сечение на равнобедрения трапец ABCD е възможно най-голямо. С θ означаваме острия ъгъл между голямата основа и бедрото. За лицето $S = S(\theta)$ на трапеца получаваме израза:

$S(\theta) = a^2(1+\cos\theta)\sin\theta$, ДО: $\theta \in (0;\pi/2)$

Търсим локалните екстремуми на тази функция.

$S'(\theta) = a^2(-\sin\theta)\sin\theta + a^2(1+\cos\theta)\cos\theta = 0$

$a^2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = -1$ и $\cos\theta = ½$

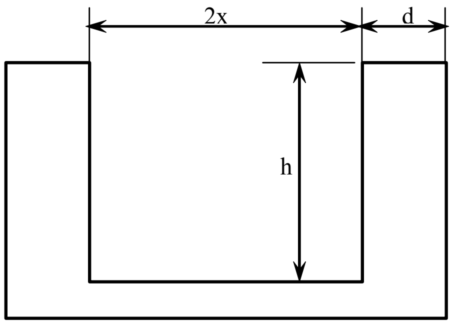
Тъй като числото -1 не е стойност на функцията cosq в $(0;\pi/2)$ изоставяме уравнението $\cos\theta = -1$. Единствената стойност на в $(0;\pi/2)$, която удовлетворява това уравнение е $\theta = \pi/3$, т.е. ъгълът е 60 градуса. Остава да покажем, че за $\theta = \pi/3$ функцията $S(\theta) = a^2(1+\cos\theta)\sin\theta$ достига максимум.

$S''(\theta) = a^2(-4\cos\theta - 1)\sin\theta$

за $0 < \theta < \pi/2$, $S''(\theta) < 0$ => функцията $S(\theta)$ има единствен локален екстремум в (0;p/2) и той е максимум => този локален максимум е най-голямата стойност на разглежданата функция, т.е.

$\max_{(0;\pi/2)} S(\theta) = S(\pi/2) = (a^2.3\sqrt{3})/4$

Задача 2: Трябва да се построи отворен цилиндричен резервоар с вместимост V_0. Дебелината на стената на резервоара има дадена големина d. Да се определят размерите на резервоара така, че разходът на материала за изработването му да е най-малък.



Решение: С h означаваме дълбочината на резервоара, с x означаваме радиуса на вътрешния диаметър. За обема на стените на резервоара получаваме:

$V = \pi(x + d)^2.d + \pi[(x + d)^2 - x^2]h = \pi d(x + d)^2 + \pi h(2xd + d^2)$

От формулата $\pi x^2 d = V_0$ изразяваме $h = V_0/\pi x^2$ =>
$V(x) = \pi d(x + d)^2 + V_0(2xd + d^2)/x^2$, $x \in (0; \propto)$
$V'(x) = 2\pi d(x + d) - 2V_0 d/x^2 - 2V_0 d^2/x^3 = 2d(x + d)(\pi x^3 - V_0)/x^3$.

Единственото решение на уравнението $V'(x) = 0$ в интервала $(0; \propto)$ е $x = \sqrt[3]{\left(V_0/\pi\right)}$. Тъй като $V''(x) = 2\pi d + 4V_0 d/x^3 + 6V_0 d^2/x^4 > 0$, то при $x = \sqrt[3]{\left(V_0/\pi\right)}$ функцията $V = V(x)$ има локален минимум, който е единствения екстремум на функцията в целия интервал $(0; \propto)$ => това е най-малката стойност на функцията, т. е. $\min_{(0;\pi)} V(x) = V\left(\sqrt[3]{\left(V_0/\pi\right)}\right)$

За определяне на размерите на резервоара остава да намерим дълбочината му h: $h = \frac{V_0}{\pi}.\sqrt[3]{\pi^2/V_0^2} = \sqrt[3]{V_0/\pi} = x$ =>

Оптималната форма на резервоара е тази, при която дълбочината е два пъти по-малка от диаметъра.

При въвеждане на елементи от математическия анализ се създава у учениците умение да боравят с понятията “функционална зависимост” и “производна” в процеса на решаването на различни задачи от познавателен и практически характер.

Учениците се убеждават в приложението на математиката в решаване на разнообразни задачи, възникващи в други науки или в каква да е област на практическа дейност.

Обучението по математическо моделиране трябва да се извърши в процеса на обучение не само по математика, но и по всички учебни дисциплини (където това е възможно), преподавани в училище и най-вече по физика. Това по естествен начин ще затвърди и доразвие уменията на учениците за решаване на текстови задачи, т.е. в математическо моделиране.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев, М.* Дидактика. София, НП, 1961.

2. *Гнеденко, Б.* Формиране на мироглед у учениците при обучението по математика. София, НП, 1986.

3. *Дрънкова, Н.* Математическо моделиране и някои задачи на линейното програмиране. – Обучението по математика и информатика, 1990, № 3.

4. *Запрянов, З.* Понятие за математически модел. – Обучението по математика и информатика, 1990, № 1.

5. *Колягин, Ю., Г. Луканкин и др.* Методика на преподаването по математика в средното училище, прев. от руски – акад. проф, д-р Б. Петканчин. София, НП, 1978.

6. *Маринова, В.* Формиране на умения за решаване на уравнения. София, Византия, 2000.

7. *Пашов , И.* Логически задачи. София, НП, 1969.

8. *Пойа, Д.* Как да се решава задача. София, НП, 1972.

9. *Столяр, А.* Педагогика на математиката. София, НП, 1976.

10. Учебниците по математика за V – XII кл.

11. *Фридман, Л. М.* Методика на обучението за решавана на математическа задача. – Обучението по математика и информатика, 1990, № 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ СЪС СРЕДСТВАТА НА АЛГЕБРАТА И МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

ВИОЛЕТА МАРИНОВА

Резюме

Разработката разглежда математически модели, които се решават със средствата на алгебрата. Това са задачи, в които се отделя внимание на важния момент – установяване на зависимости между величините и преводът им на математически език. Отделно са разгледани задачи, които се решават със средствата на математическия анализ.

Ключови думи: математически модел, моделиране, училищен курс по математика, алгебра, математически анализ.

MATHEMATICAL MODELS THAT ARE SOLVED BY TOOLS OF THE ALGEBRA AND BY TOOLS OF MATHEMATICAL ANALYSIS IN SCHOOL MATHEMATICS COURSE

VIOLETA MARINOVA

Summary

The paper considers mathematical models that are solved with the means of algebra. These are tasks which focus on the important point - the establishment of relationships between values and their translation into mathematical language. Individual tasks are discussed that are solved by means of mathematical analysis.

Keywords: mathematical model modeling school course of Mathematics, algebra, mathematical analysis.