

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРАНЕ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА – ДИДАКТИЧЕСКИ АСПЕКТИ И ЗНАЧЕНИЕ

Виолета Маринова

Много области в науката и практиката, които доскоро не използваха математически методи на изследване, сега усилено се стремят да попълнят пропуската. Причината за това е, че чисто качествено изучаване на природните явления, икономиката, медицината, екологията, организацията на производството и управлението на процесите, по правило се оказва недостатъчно. Ето защо много често се използват математиката и математическото моделиране при решаване на редица актуални задачи. Във връзка с това е необходимо обучението по математика да включва и обучение в приложение на математическия апарат при решаване на разнообразни задачи, възникващи както вътре, така и вън от математиката, т.е. да се показва и използва процесът на взаимното стимулиране при развитието на частните науки.

Необходимостта от практическо приложение на получените от учениците знания в процеса на обучението е важна и от друга гледна точка. Учениците трябва да усвояват получените знания задълго. Те ще им бъдат полезни при завършване на училище, в тяхната професионална дейност или при по-нататъшното получаване на знания. Да се мисли, че този, който е овладял теорията, е овладял и практиката, е неправилно. Теорията е само необходима предпоставка за задълбочени и трайни знания. Затова математическото моделиране заема основно място в обучението по математика.

Решаването на всяка текстова или приложна задача е съпроводено от съставяне на модел, решаване на този модел и съпоставяне решението на модела с изходната ситуация. Опитът в училищата показва, че учениците не могат сами, без ръководството от страна на учителя, да овладеят тези изисквания. Това показва необходимостта да се провеждат редица упражнения в това отношение.

Важно е и косвеното свързване на математическата теория с практиката. В този случай математическата теория се използва при разработката на теория в друга научна област и получените в нея изводи могат да се приложат в практиката.

Например: Теорията на уравненията се използва в теорията за движението на телата (в кинематиката), а теорията за движението на телата има важно практическо приложение при конструирането и движението на превозните средства, на спътниците и т.н. Тук обаче се стига до въпроса за сложните взаимовръзки между различните теории в науката.

Изолираното изучаване на отделните теории и раздели от тях в училищния курс по математика, изолираността на математиката от другите учебни предмети и особено от физиката се обяснява с подценяване на втория вид приложение – косвеното.

В разработката са посочени мнения на наши и чужди автори по въпроса за математическото моделиране и математическия модел в науката математика и в училищния курс по математика. Разгледан е начинът, по който се формира понятието „математически модел” в учебната програма по математика. Направена е класификация на текстовите задачи в зависимост от алгоритмите (специалните методи) за решаването им. Формулирани са и някои общи изисквания при решаване на математически модели.

I. Що е математическо моделиране?

По въпроса за математическото моделиране и математическия модел в обучението по математика предвид на неговата важност са работили наши и чужди автори.

М. Андреев [1] разглежда моделирането в обучението по математика като “методът, с чиято помощ се изследват предметите и явленията чрез модели”. Съгласно Гнеденко “моделирането е математическо решаване на практическа задача, чрез изучаване и опростяване на нейната приближена схема или, както се казва, неин математически модел” [2].

Нашето становище по въпроса е най-близко до това на проф. Запрянов [4]. Според него “моделирането е възпроизвеждане на някакъв обект с помощта на друг обект, който се създава специално, за да се изучи първият. Когато описанието на изучаваните обекти или явлението от заобикалящия ни свят се реализира с математически средства, моделирането се нарича математическо”. Разбира се, под възпроизвеждане трябва да се разбира приближено или точно.

Математическият модел на даден обект, явление или процес, представлява система от математически зависимости, които описват основните техни характеристики. На пръв поглед може да изглежда, че колкото един модел е по-близко до действителността, толкова по-точни ще бъдат неговите предвиждания. Но това невинаги е така. В математическия модел

се отразяват само най-съществените страни на обекта, който се изучава, а второстепенното се пренебрегва. При това е необходимо по възможност по-пълно да се възпроизведат именно онези свойства на прототипа, които са важни за даденото изследване.

С други думи математическият модел обикновено е една абстракция, при която маловажните за случая фактори отпадат, а се отразяват само най-съществените от определена гледна точка.

Основните изисквания към математическите модели са [9]:

1. Да отразяват съществените особености и пренебрегват второстепенните черти на обекта, който се моделира, но в резултат на опростяването да не се губи “рационалното зърно”, съществено за обекта.

2. Да бъдат максимално опростени в математическо отношение, за да могат да се изследват. Това се постига чрез идеализиране на реално несъществуващи обекти, като материална точка, абсолютно твърдо тяло, идеална течност и др.

Понякога за едно и също явление могат да се разработят няколко математически модела, които с еднаква или с различна точност описват действителността. Математическото моделиране е многопластов процес, който Запрянов [4] разделя условно на четири етапа:

Първи етап – построяването на математическия модел. Тук се включва определяне на основните величини, характеризиращи научното явление или обект, откриване на връзките между съответните променливи величини, които се описват с математически средства и специфичните ограничения за основните величини. По този начин на дадената задача се прави математическа форма и тя може да бъде решавана и изследвана с математически методи.

Втори етап – изследва се и се решава математическа задача, по която се стига след опростяване на модела. На този етап важна роля играе математическият апарат, който ще се използва за решаване на математическа задача. Временно се изоставя конкретното съдържание на модела и се съсредоточава вниманието върху неговата математическа същност.

Трети етап – сравняване на резултатите от модела с данните от наблюденията, т.е. с практиката. Тук се оценява достоверността на математическия модел и границите на неговата приложимост.

Четвърти етап – усъвършенстване на модела, ако това се налага.

II. Математическо моделиране в училище

Една от основните функции в обучението по математика е формиране и развитие у учениците на общи умения и способности за решаване

на различни математически задачи, включително и приложни. С израстването на учениците се увеличава запасът им от математически знания и умения за решаване на математически задачи. В учебната програма по математика е използван спираловидния метод за придобиване на нови знания и тяхното постепенно задълбочаване. В резултат на това едно и също понятие се разглежда многократно в училищния курс по математика.

Например, понятието “уравнение” започва да се формира още в началните класове. Решават се уравнения от вида $a + x = b$; $a \cdot x = b$; $a : x = b$; $x : a = b$. По нататък се въвежда описателно определение на понятието “уравнение”: вид равенство, което съдържа неизвестно. Въвеждат се термините “неизвестно”, “корен”. След това, се актуализира изученото и се изяснява понятието “равносилни” уравнения, изучават се уравнения от първа степен с едно неизвестно, приложението им за решаване на текстови задачи. На следващия етап – дробни уравнения с едно неизвестно, квадратни и биквадратни уравнения. В горния курс – по-сложни уравнения и уравнения, свеждащи се до основни – показателни, логаритмични, тригонометрични и др.

По аналогичен начин се формира понятието “математически модел”. Още в началните класове у учениците се изграждат умения за съставяне на алгебрични изрази по зададени условия и свързването им със знака за равенство. В четвърти и пети клас учениците решават текстови задачи, които се свеждат до решаване на изучените уравнения. При разглеждане на урока “Приложение на линейната функция” учениците, на базата на решими за тях приложими задачи, достигат до идеята за математически модел. С понятието “математически модел” за пръв път учениците се запознават в седми клас. В осми клас и горния курс това понятие се доразвива на базата на по-богатия запас от математически знания и приложението на математиката в другите учебни дисциплини.

Така математическо моделиране в училищния курс по математика обикновено се използва във всички случаи, когато се налага решаване на текстови задачи.

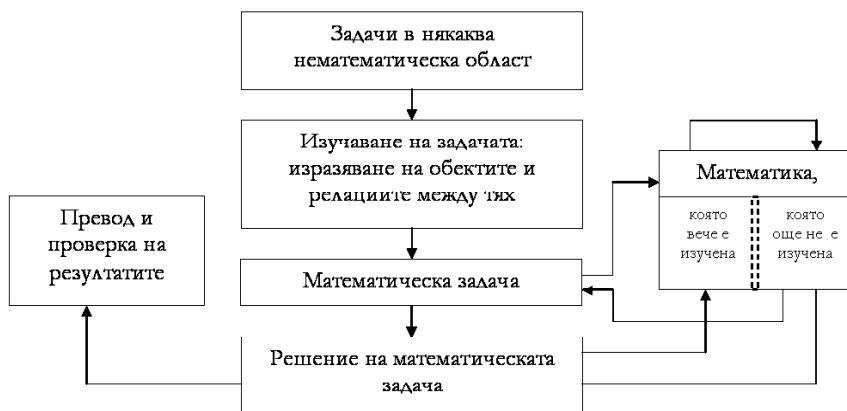
Задачите от училищния курс по математика могат да бъдат групирани по характера на обектите, посочени в тях. Примерно деление по този признак дава Лев Фридман [10]:

- математически задачи, в които всички обекти са математически;
- практически или приложни задачи, в които някои обекти са предметни, физически, химически и др.

В математиката се разглеждат само такива практически задачи, за които може да се построи модел във форма на “чиста” математическа задача.

Тъй като обучението по математика включва и обучение в приложение на математическия апарат за решаване на разнообразни задачи, то можем да разграничим, от една страна, – обучение в построяване на математически модел на практически задачи (възникващи в или въвн от математиката), а, от друга страна, – обучение в решаване на математически задачи.

Процесът на взаимовръзка на практическите задачи с математическата теория А. А. Столяр [8] изобразява в следната схема:



От схемата се вижда как пунктираната “граница“ между “вече изучената“ и “още неизучената“ математика се премества надясно, разширявайки областта на теоретичните знания под влиянието на потребностите при решаване на задачата.

Невинаги обаче въвеждането на нови понятия и изобщо разширяване на теорията може да се мотивира с “практически” задачи, които възникват извън математиката. Тъй като в самата математика много понятия и теории възникват (поне първоначално) от вътрешно математически потребности (например комплексните числа) и в обучението по математика се налага да се мотивира по-нататъшното развитие на теорията от чисто математически задачи (главно в горните класове, когато учениците вече могат да разбират вътрешно-математическите потребности).

Задачите с практико-приложен характер имат голямо значение при възпитаване интереса към математиката. Чрез тях учениците се убеждават в значението на математиката в различни сфери на човешката дейност, в нейната полза и необходимост при практическа работа, виждат възможностите на приложната математика. Решаването на текстови задачи способства за развитие мисленето на учениците, за по-дълбоко усвояване идеите на функционалните зависимости повишава изчислителната техника.

Въпросът за математическото моделиране в училище е достатъчно разработен в методико-математическата литература. Всички автори представят моделирането като многопластов процес. Ще изложим вижданията по този въпроси и на други автори.

Според акад. Петканчин [6] етапите на решаване на текстова задача с метода на уравненията, са:

1. Разбор на задачата с цел да се избере основно неизвестно.
2. Да се намери основание за свързване на тези изрази със знака “=” и да се състави уравнение.
3. Да се намерят решения на полученото уравнение; да се изясни няма ли измежду тях “чужди” за задачата; да се установи изчерпват ли решенията на уравнението всички решения на задачата.

Н. Дрънкова [3] представя следните етапи:

1. Възприемане, осмисляне, анализиране на ситуацията.
2. Превод на текста във вид на схема, чертеж.
3. Построяване на математически модел.
4. Операции в модела.
5. Съотнасяне на резултатите от решението на модела към текста.

Тъй като текстовите задачи са част от математическите, според нас трябва да се използват указанията на Д. Пойа в книгата му “Как да се решава задача” [7]:

1. Разбиране на задачата. (Кое е неизвестното? Кое е дадено? Какво е условието?)

2. Намерете връзката между данните и неизвестното.
3. Съставяне на план.
4. Проведете своя план (като проверявайте всяка своя стъпка).
5. Поглед назад – изследване на полученото решение.

В “Педагогика на математиката” [8] Столяр формулира някои препоръки, които са подходящи за всички случаи при решаване на задачи за съставяне на уравнение (или система уравнения):

1. Подробно изучаване условието на задачата.
2. Изясняване връзките между срещащите се в нея величини.
3. Кое е целесъобразно да се изразява в лявата страна на уравненията?
4. Какво да се приема за неизвестно?
5. Какви други величини е необходимо да се изразяват чрез неизвестното?

6. Коя е дефиниционната област на търсените величини и др.

Очевидно безпредметно е да се търси общ метод (алгоритъм) за съставяне на модели по условието на всяка задача, а трябва да се създават

алгоритми (специални методи) само за решаване на задачи от определен вид (тип). При наличието на алгоритъм, обучението трябва да доведе учениците до неговото откриване и усвояване, за да могат при решаването от същия вид, веднага да прилагат този алгоритъм (след като определят, че задачата принадлежи към дадения вид задачи). Когато пък става дума за обучаване в решаване в нестандартни задачи, които изискват творчески подход, когато усвоените алгоритми са неприложими (не довеждат до решаването на задачата), обучението трябва да ориентира учениците към търсене на решението с помощта на някои полезни препоръки, които макар и да нямат алгоритмичен характер и не гарантират успех в търсенето, все пак го подпомагат.

Очевидно е, че формулирането и усвояването на алгоритъм за решаване на задачи има смисъл само в този случай, когато задачите от разглеждания вид често се срещат и имат определено практическо значение. Понякога е целесъобразно свеждането на задачите от даден вид до задачи от по-общ вид, за които вече е известен алгоритъмът.

Например: Задачите от “проценти” лесно се свеждат до съответните задачи от “дроби”.

Методиката за обучение в решаване на типови задачи е достатъчно широко разработена в съществуващата литература. Текстовите задачи в училищния курс по математика могат да бъдат разпределени на **типови** по следния начин:

а) математически модели, които се решават с **аритметични средства** (това са задачи, които се свеждат до намиране на част от число, до намиране на число по дадена негова част, намиране отношението на две числа и задача за пропорционални величини).

б) математически модели, които се решават с **алгебрични средства** (това са задачи, които се свеждат до решаване и изследване на линейно, квадратно и ирационално уравнение или неравенство; системи от уравнения или неравенства).

в) математически модели, които се решават със средствата на **математическия анализ** (това са задачи, които се свеждат до изследване на линейно, квадратно и ирационално уравнение или неравенство; системи от уравнения или неравенства).

г) математически модели, които се решават със средствата на **комбинаториката** и елементи от **теория на вероятностите** (това са задачи, които се свеждат до намиране броя на комбинаторните съединения без повторения – пермутации, вариации, комбинации, до намиране вероятността на някакво елементарно събитие).

д) математически модели, които се решават със средствата на математическата логика (това са задачи, в които се използват логическите операции отрицание, дизюнкция, конюнкция, строга дизюнкция, импликация и равнозначност).

Тежката задача за обучението на учениците на математическо моделиране лежи не само (и то дори не толкова) върху учителите по математика. То трябва да се извършва и в уроците по всички учебни предмети, ползващи математически методи и най-вече в уроците по физика, химия, биология.

III. Общи методически бележки

Могат да се формулират следните изисквания при решаване на математически модели:

1. Учителят трябва да има в запас упражнения за преодоляване на получените затруднения. Например – решаване на задачи за формиране умения у учениците да виждат зависимости между величините, дадени в условието на задачата.

2. За допълване на пропуски в знанията на някои ученици да се дават специално подбрани задачи.

3. Необходима е системна, целенасочена работа за формиране у учениците на следните умения:

– умение да се открива и изразява на математически език изменението на величините и зависимости между тях, често пъти това са закони от физиката, химията, електротехниката и др.;

– умение внимателно да четат текста на задачата;

– умение да правят първичен анализ на текста, т.е. да отделят условието и въпросите на задачата;

– умение да оформят кратък запис на текста във вид на таблица, схема и т.н. При много от задачите (от движение, работа) се получава голяма нагледност, която облекчава процеса на усвояване на знанията. Ако задачата може да се реши без схема, това не е задължително да се прави;

– да получават нови знания от известни вече знания чрез правила за извод;

– да правят обобщения;

– лесно и бързо да се преминава от един ход на мислене към друг (от анализ към синтез, от абстрахиране към конкретизиране, от индукция към дедукция);

– да се разглежда един и същ въпрос от различни гледни точки;

– да се намират рационални решения на поставените задачи;

– формиране на умение на краткост, яснота и простота на мисленето.

4. Въпреки че ученикът не бива да се учи да помни последователност от задължителни стъпки, при решаването на текстовите задачи е уместно да прилага етапите на математическото моделиране с цел преодоляване на психическото напрежение и подобряване качеството на учебния процес. Това спомага за логическото мислене на учениците.

5. Учителят, имайки предвид трудностите, които срещат учениците при моделирането, трябва умело да ги насочва, да разсъждава заедно с тях.

6. Важен момент при математическото моделиране е подборът и подреждането на задачите. Задачите трябва да се усложняват постепенно, да показват приложението на математиката в другите науки и практиката. При възможност да се даде класификация по определен признак.

7. В началото на темата “Математическо моделиране” трябва да се актуализират и систематизират необходимите умения и знания.

8. След направеното актуализиране на необходимите знания на учениците се предлага съответното разделение на процеса на математическо моделиране (в зависимост от типа текстови задачи, които ще се решават).

9. В края на темите за математическо моделиране с учениците се прави самостоятелна работа. Това е един от начините, по които може да се установи доколко е усвоен материалът, какви са уменията на учениците за самостоятелно решаване на математически модели, за навременно откриване на грешки и отстраняването им.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев, М.* Дидактика. София, НП, 1961.
2. *Гнеденко, Б.* Формиране на мироглед у учениците при обучението по математика. София, НП 1986.
3. *Дрънкова, Н.* Математическо моделиране и някои задачи на линейното програмиране. – Обучението по математика и информатика, 1990, № 3.
4. *Запрянов, З.* Понятие за математически модел. – Обучението по математика и информатика, 1990, № 1.
5. *Маринова, В.* Формиране на умения за решаване на уравнения. София, ВИЗАНТИЯ, 2000.

6. Методика на преподаването по математика в средното училище, прев. от руски – акад. проф, д-р Б. Петканчин. София, НП, 1978.
7. *Пойа, Д.* Как да се решава задача. София, НП, 1972.
8. *Столяр, А.* Педагогика на математиката. София, НП, 1976.
9. Учебниците по математика за V–XII кл.
10. *Фридман, Л. М.* Методика на обучението за решаване на математическа задача. – Обучението по математика и информатика, 1990, № 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРАНЕ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА – ДИДАКТИЧЕСКИ АСПЕКТИ И ЗНАЧЕНИЕ

ВИОЛЕТА МАРИНОВА

Резюме

В разработката са посочени мнения на наши и чужди автори по въпроса за математическото моделиране и математическия модел в науката математика и в училищния курс по математика. Разгледан е начинът, по който се формира понятието „математически модел” в учебната програма по математика. Направена е класификация на текстовите задачи в зависимост от алгоритмите (специалните методи) за решаването им. Формулирани са и някои общи изисквания при решаване на математически модели.

MATHEMATICAL MODELS AND MODELING IN SCHOOL MATHEMATICS COURSE – NATURE AND MEANING

VIOLETA MARINOVA

Summary

This paper considers our and foreign authors about mathematical modeling and mathematical models in the school math course. The way to form the term “mathematical model” in the curriculum in mathematics is given. It is made of text classification tasks, depending of the algorithms (special methods) to solve them. Have been formulated certain general requirements for solving mathematical models.