



DOI: 10.54664/ISRH9472

Моделиране с линейни уравнения на текстови задачи от движение

Виолета Миткова

Modelling with Linear Equations of Word Problems of Movement

Violeta Mitkova

Abstract: The article deals with word problems of movement on land, water, and air. It focuses on presenting the text of the problem with a diagram and a table.

Keywords: diagram; table; word problem; problems of movement.

ВЪВЕДЕНИЕ

Много задачи от живота, науката и техниката водят до решаване на уравнения. Съставянето на уравнение за дадена текстова задача означава, че задачата се превежда от говоримия език на езика на математиката [5]. Този процес се нарича моделиране с уравнение, а съставеното уравнение – математически модел [2]. Чрез решаване на уравнението се решава поставената практическа задача. Теоретичното проучване и наблюдението на реалната учебна практика по математика са основа за предлагане на системи задачи, чрез които този метод се въвежда мотивирано като се спазват дидактическите принципи научност и достъпност [1].

ИЗЛОЖЕНИЕ

Етапите на решаване на дадена текстова задача са:

1. Избиране на неизвестния обект и означаването му с буква
2. Определяне на допустимите стойности на неизвестното (ДС)
3. Съставяне на математически модел (уравнението)
4. Решаване на математическия модел (уравнението)
5. Проверяване дали полученото число удовлетворява ДС
6. Записване на отговора на поставения въпрос в задачата.

В тази статия се разглеждат задачи от движение, при които телата се движат равномерно, и се решават чрез равенствата $S = v \cdot t$; $v = \frac{S}{t}$; $t = \frac{S}{v}$, където S е пътя, v – скоростта и t – времето. Величините S , v , и t се измерват със съответстващи мерни единици, което означава, че ако S се измерва с (km), а t – с часове (h), v се измерва с километри за час (km/h) [4].

В задачите от движение е желателно да се чертае схема на движението за по-добра ориентация, което подпомага зрителното възприемане и осъзнаването на условието (данните) на задачата. Изразите, които се съставят в процеса на моделирането е препоръчително да се подредят

в таблица за по-голяма нагледност и по-лесно и бързо откриване на математическия модел. С практическа цел е необходимо при решаване на задачи от движение да се формират умения на учениците за намиране на времето за движение, ако знаят часа на тръгване и часа на пристигане, особено когато се налага преминаване от часове в минути и обратно [3].

Задачите от движение могат да бъдат най-различни: насрещни движения, еднопосочни движения, движения по въздух и вода, задачи с влакове, коли, кораби пешеходци и др.

Задача 1. Йорданка Донкова е българска лекоатлетка, поставила световен рекорд по бягане 100 m с препятствия, който не е подобрен. С каква средната скорост е бягала, ако времето е 12,2 s?

Решение: От условието на задачата става ясно, че времето и пътя са дадени: $t = 12,2 \text{ s}$ и $S = 100 \text{ m}$. Изразяваме скоростта $v = S : t$, заместваме във формулата $v = 100 : 12,2$ и се получава $v = 8,2 \text{ m/s}$.

Отговор: Средната скорост, с която е бягала Йорданка Донкова, е 8,2 m/s.

Извод: Понеже времето е дадено в секунди и пътя в метри за скоростта получаваме метри в секунди.

Задача 2. Град С е между градовете А и В, а разстоянието между А и С е 50 km. От А за В тръгва лека кола със скорост 70 km/h и в същото време от С за В тръгва камион със скорост 50 km/h, които пристигат едновременно в град В. Да се намерят времето на пътуване на превозните средства и разстоянията АВ и СВ [4].

Решение:

В задачата са неизвестни две величини – време и път. Решението може да се представи по два начина, като се избере едната величина за неизвестно, а след това другата величина се изразява чрез нея [4].

I начин: Означаваме времето с x . Тъй като времето на пътуване на леката кола – $t_{\text{л.к.}}$ и на камиона – $t_{\text{к.}}$ е едно и също, записваме равенството $t_{\text{л.к.}} = t_{\text{к.}} = x$ (h). Определяме допустимите стойности ДС: $x > 0$.

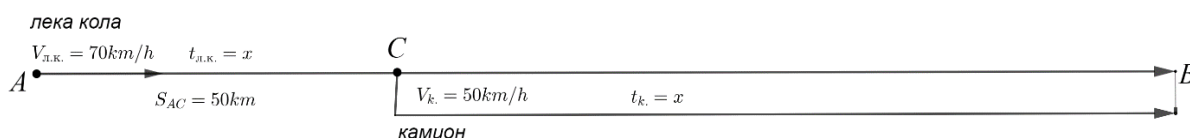


Схема 1

Таблица 1

	v (km/h)	t (h)	S (km)
лека кола	70	x	$70x$
камион	50	x	$50x$

Изминатото разстояние на леката кола е $S_{\text{л.к.}} = S_{\text{АВ}}$, а на камиона е $S_{\text{к.}} = S_{\text{СВ}}$ (схема 1)

От условието $S_{\text{л.к.}} = S_{\text{к.}} + 50$ се съставя уравнението $70x = 50x + 50$.

След решаване на уравнението се намира, че $x = 2,5$, което е допустима стойност –

$2,5 \in \text{ДС}$. $2,5 = 2\frac{1}{2} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$, следователно $t_{\text{л.к.}} = t_{\text{к.}} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$

$S_{\text{л.к.}} = 70x = 70 \cdot 2,5 = 175 \text{ km}$, $\text{АВ} = 175 \text{ km}$

$S_{\text{к.}} = 50x = 50 \cdot 2,5 = 125 \text{ km}$, $\text{СВ} = 125 \text{ km}$

Отговор: Времето на пътуване на превозните средства е 2 h 30 min, а разстоянията са 175 km и 125 km.

II начин: Означаваме с x разстоянието между градовете А и В, а именно

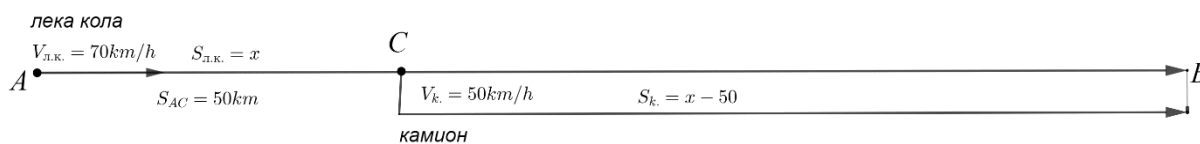


Схема 2

Таблица 2

	S (km)	v (km/h)	t (h)
лека кола	x	70	$\frac{x}{70}$
камион	$x - 50$	50	$\frac{x - 50}{50}$

От условието $t_{\text{л.к.}} = t_{\text{к.}}$ се съставя уравнението $\frac{x}{70} = \frac{x-50}{50}$. След като се реши се получава, че $x = 175$, което е допустима стойност – 175 € ДС.

$$S_{\text{л.к.}} = 175 \text{ km}$$

$$S_{\text{к.}} = 175 - 50 = 125 \text{ km}$$

$$t_{\text{л.к.}} = t_{\text{к.}} = \frac{x}{70} = \frac{175}{70} = 2,5 \text{ h}$$

Отговор: Разстоянията са 175 km и 125 km, а времето на пътуване на превозните средства е 2 h 30 min.

Извод: Когато се приема за неизвестно S, за другите величини се получават по-сложни изрази, затова първият начин е по – подходящ за решение на задачата [2].

Задача 3. Разстоянието по въздух между летищата А и В е 2960 km. В 11 h от А към В излита самолет, а в 12 h от В към А излита друг самолет, който се движи със 80 km/h по-бързо. Намерете скоростите на двата самолета, ако в 13 h 30 min разстоянието между тях е 320 km.

Решение: Времето за полета на „първия“ самолет от А до А₁ е $t_1 = 13 \text{ h } 30 \text{ min} - 11 \text{ h} = 2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2,5 \text{ h}$. Времето за полета на „втория“ самолет от В до В₁ е $t_2 = 13 \text{ h } 30 \text{ min} - 12 \text{ h} = 1 \text{ h } 30 \text{ min} = 1,5 \text{ h}$. Скоростта на „първия“ самолет означаваме с x , $V_1 = x \text{ km/h}$. Тогава скоростта на „втория“ самолет е $V_2 = (x + 80) \text{ km/h}$, ДС: $x > 80$. За по-голяма нагледност данните за величините s, v, и t нанасяме в таблица 3.

Таблица 3

	v (km/h)	t (h)	S (km)
I самолет	x	2,5	$2,5x$
II самолет	$x + 80$	1,5	$1,5(x + 80)$

Тъй като в условието на задачата не е уточнено дали самолетите са се срещнали, или не са се срещнали, трябва да се разглеждат два случая. Означенията и таблицата са едни и същи за двата случая, схемите ще са различни.

I случай: Разстоянието между двата самолета е 320 km преди да са се срещнали.

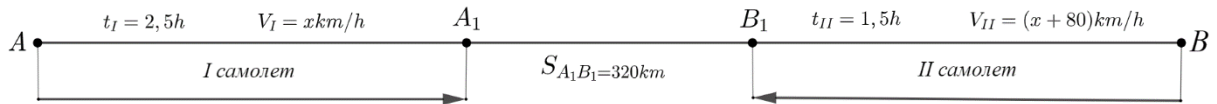


Схема 3

Разстоянието, което е изминал „първият“ самолет е $S_I = S_{AA_1}$, а на „вторият“ самолет е $S_{II} = S_{BB_1}$ (схема 3). Дадено е, че $S_{AB} = 2960$ km и $S_{A_1B_1} = 320$ km. Записваме условието $S_{AA_1} + S_{BB_1} = S_{AB} - S_{A_1B_1}$ и съставяме уравнението $2,5x + 1,5(x + 80) = 2960 - 320$.

След като се реши уравнението се получава, че $x = 630$, 630 € ДС.

Следователно $V_I = 630$ km/h, и $V_{II} = 630 + 80 = 710$ km/h.

Отговор: Скоростта, с която се движил първия самолет е 630 km/h, а скоростта на втория самолет е 710 km/h.

II случай: Разстоянието между двата самолета е 320 km, след като са се разминали.

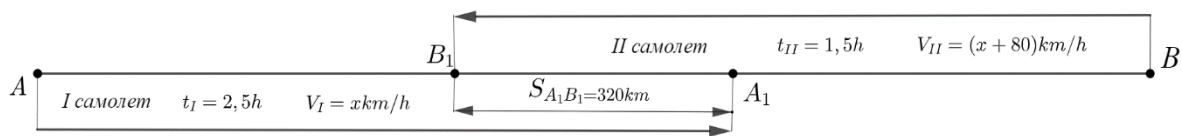


Схема 4

В този случай е ясно, че и двата самолета са изминали по-дълго разстояние. Условието, което записваме $S_{AA_1} + S_{BB_1} = S_{AB} + S_{A_1B_1}$ и уравнението е

$2,5x + 1,5(x + 80) = 2960 + 320$. Решава се уравнението и се получава, че $x = 790$,

790 € ДС. Следователно $V_I = 790$ km/h, и $V_{II} = 790 + 80 = 870$ km/h.

Отговор: Скоростта, с която се движил първия самолет, е 790 km/h, а скоростта на втория самолет е 870 km/h.

Извод: С разглеждането на двата случая се получават два различни отговора на задачата.

Задача 4. Пътник, пътуващ с влак от София за Кюстендил, разстоянието между които е 90 km, престоял на гарата в Кюстендил 20 min и се върнал в София със същия влак. На гарата в София установил, че пътуването и престоят са му отнели общо 3 h 40 min. [4]. Да се намери скоростта на влака.

Може да се предложат два подхода за достигане до решението на задачата. Първият начин е да се начертае схемата на движението и данните за величините да се нанесат в таблица, а вторият начин без да използваме схема и таблица, чрез разсъждения съставяме математическия модел на задачата.

I начин: Скоростта на влака означаваме с x , $v = x$ (km/h), определяме допустимите стойности ДС: $x > 0$.

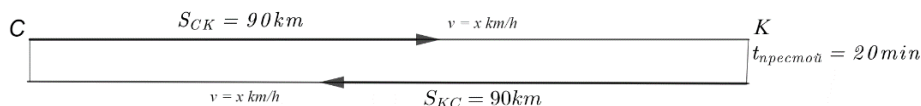


Схема 5

Тъй като времето се измерва в часове минутите трябва да се превърнат в часове.

$20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$; $3 \text{ h } 40 \text{ min} = 3\frac{40}{60} \text{ h} = 3\frac{2}{3} \text{ h}$.

Таблица 4

	S (km)	v (km/h)	t (h)
C → K	90	x	$\frac{90}{x}$
K → C	90	x	$\frac{90}{x}$

Понеже времето на отиване, връщане и престоя е 3 h 40 min, записваме условието

$$t_{c \rightarrow k} + t_{k \rightarrow c} + t_{\text{престоя}} = 3\frac{2}{3}, \text{ откъдето съставяме уравнението } \frac{90}{x} + \frac{90}{x} + \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$$

$\frac{180}{x} = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}; \frac{180}{x} = \frac{10}{3}$; Като използваме основното свойство на пропорциите за x получаваме, че $x = 54, 54 \in \text{ДС}$.

Отговор: Скоростта на влака, с който се е движел е 54 km/h.

II начин: Пак означаваме скоростта на влака с x, $v = x \text{ km/h}$, ДС: $x > 0$. Като съберем пътя на отиване и връщане намираме, че $S = 90 + 90 = 180 \text{ km}$, и от общото време изваждаме времето на престоя, получаваме $t = 3 \text{ h } 40 \text{ min} - 20 \text{ min} = 3 \text{ h } 20 \text{ min} = 3\frac{1}{3} \text{ h} = \frac{10}{3}$. След като приложим формулата за пътя $S = v \cdot t$, се получава уравнението $180 = x \cdot \frac{10}{3}$ и корена на това уравнение е $x = 54, 54 \in \text{ДС}$. Откъдето записваме отговора.

Отговор: Скоростта на движение на влака е 54 km/h.

Извод: При изразяване на времето t чрез пътя S и скоростта v се получава дробно уравнение, което е по-трудно за решаване, затова подходящият начин на решение на задачата е вторият начин.

Следващата задача е от движение по вода. Скоростта на движението се определя от скоростта на плавателния съд и скоростта на течението. Ако моторен плавателен съд се движи по течението, скоростта му е $V_{\text{по течението}} = V_{\text{в спокойна вода}} + V_{\text{на течението}}$, а ако се движи срещу течението тогава скоростта му е $V_{\text{с/у течението}} = V_{\text{в спокойна вода}} - V_{\text{на течението}}$. При движение на сал скоростта му е равна на скоростта на течението [4].

Задача 5. Моторна лодка изминала разстояние между две пристанища срещу течението на реката за 1 h 10 min и се върнала обратно по течението за 54 min [6]. Да се намерят скоростта на течението на реката и разстоянието между пристанищата, ако собствената скорост на лодката е 31 km/h.

Решение: Времето на движението срещу течението е $t_{\text{с/у теч.}} = 1 \text{ h } 10 \text{ min} = \frac{7}{6} \text{ h}$, а времето на движението по течението е $t_{\text{по теч.}} = 54 \text{ min} = \frac{9}{10} \text{ h}$.

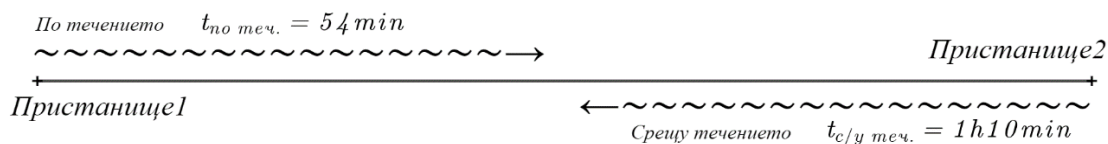


Схема 6

Означаваме скоростта на течението на реката с x, $V_{\text{теч.}} = x \text{ km/h}$, ДС: $x > 0$. Тогава скоростта на лодката срещу течението е $V_{\text{с/у теч.}} = (31 - x) \text{ km/h}$, а по течението е $V_{\text{по теч.}} = (31 + x) \text{ km/h}$. Изразените величини попълваме в таблица 5.

Таблица 5

	v (km/h)	t (h)	S (km)
по течението	$31 + x$	$\frac{9}{10}$	$(31 + x) \frac{9}{10}$
срещу течението	$31 - x$	$\frac{7}{6}$	$(31 - x) \frac{7}{6}$

Тъй като разстоянието, което е изминала моторната лодка срещу течението и по течението е едно и също, записваме равенството

$$S_{\text{с/у теч.}} = S_{\text{по теч.}} \text{ и съставяме уравнението } (31 + x) \frac{9}{10} = (31 - x) \frac{7}{6}$$

Уравнението има корен $x = 4$, 4 € ДС, т.е. скоростта на течението е 4 km/h.

$$S_{\text{по теч.}} = V_{\text{по теч.}} \cdot t_{\text{по теч.}} = (31 + 4) \frac{9}{10} = 35 \cdot \frac{9}{10} = 31,5$$

Отговор: Скоростта на течението на реката е 4 km/h, а разстоянието между пристанищата е 31,5 km.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решаването на текстова задача с уравнение следва естествено и логично както математическия модел на задачата, така и структурата ѝ. Етапите на решаване на текстови задачи следват две основни идеи на методиката на решаване на задачи [1]:

➤разсъждения за преход от дадена задача към решението ѝ: Z (задача) $\rightarrow U$ (математически модел) $\rightarrow R$ (решение) $\rightarrow O$ (отговор) [1];

➤етапите за решаване на математическа задача, въведени от Дйорд Пойа и доразвити от много други математици, методици и дидактици: разбиране на задачата, изграждане на идея (план) за решението, реализиране на плана, връщане назад [1].

Прилагането на метода на уравненията за решаване на текстови задачи е полезен както за развитие уменията на учениците в математическо моделиране, така и за усвояване на обобщен метод за решаване на нематематически задачи. Методът на уравненията е основен метод за решаване на текстови задачи в училищния курс по математика [1].

Текстовите задачи от движение са едни от най-трудните задачи за учениците в училищния курс по математика. Затова при решаването на тези задачи е уместно учителят да илюстрира с таблица или чертеж. Задачите, които са разгледани в статията са представени и със схема, и с таблица. Така учениците придобиват по-голяма яснота за условието на задачата и по-добре разбират връзката между величините.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Минчева И. 2013. Методът на уравненията за решаване на текстови задачи в началното обучение по математика, Научни трудове на русенския университет – том 52, серия 6.2, Русе: Издателски център при Русенски университет „Ангел Кънчев“, с. 50 – 54 // Mincheva I. (2013). Metoddat na uravneniyata za reshavane na tekstovi zadachi v nachalnoto obuchenie po matematika, Nauchni trudove na rusenskiya universitet – tom 52, seriya 6.2, Ruse: Izdatelski tsentar pri Rusenski universitet „Angel Kanchev“, s. 50 – 54

[2] Нинкова, П., Лилкова, М., Стоева, Т., Шаркова, И., Раденкова, Л. 2018. Математика – 7. клас. София: Просвета // Ninkova, P., Lilkova, M., Stoeva, T., Sharkova, I., Radenkova, L. (2018). Matematika – 7. klas. Sofiya: Prosveta

[3] **Нинкова, П., Лилкова, М., Стоева, Т., Шаркова, И., Раденкова, Л.** 2018. Книга за учителя по математика – 7. клас, София: Просвета // Ninkova, P., Lilkova, M., Stoeva, T., Sharkova, I., Radenkova, L. (2018). *Kniga za uchitelya po matematika – 7. klas*, Sofiya: Prosveta

[4] **Паскалева, З., Алашка, М., Алашка, Р.** 2018. Математика – 7. клас. София: Архимед // Paskaleva, Z., Alashka, M., Alashka, R. (2018). *Matematika – 7. klas*. Sofiya: Arhimed

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА

Виолета Миткова – докторант, редовна форма на обучение; област на висше образование 1. Педагогически науки; Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по...; Научна специалност: Методика на обучението по математика; Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“; Научен ръководител: доц. д-р Иванка Минчева Георгиева; e-mail: v.mincheva@yahoo.com

ABOUT THE AUTHOR

Violeta Mitkova – full-time PhD student; Field of Higher Education 1. Pedagogical Sciences; Professional Field 1.3. Pedagogy of Teaching...; Doctoral Programme: Mathematics Teaching Methodology; St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo; Academic Supervisor: Assoc. Prof. Ivanka Mincheva Georgieva, PhD; e-mail: v.mincheva@yahoo.com